

KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

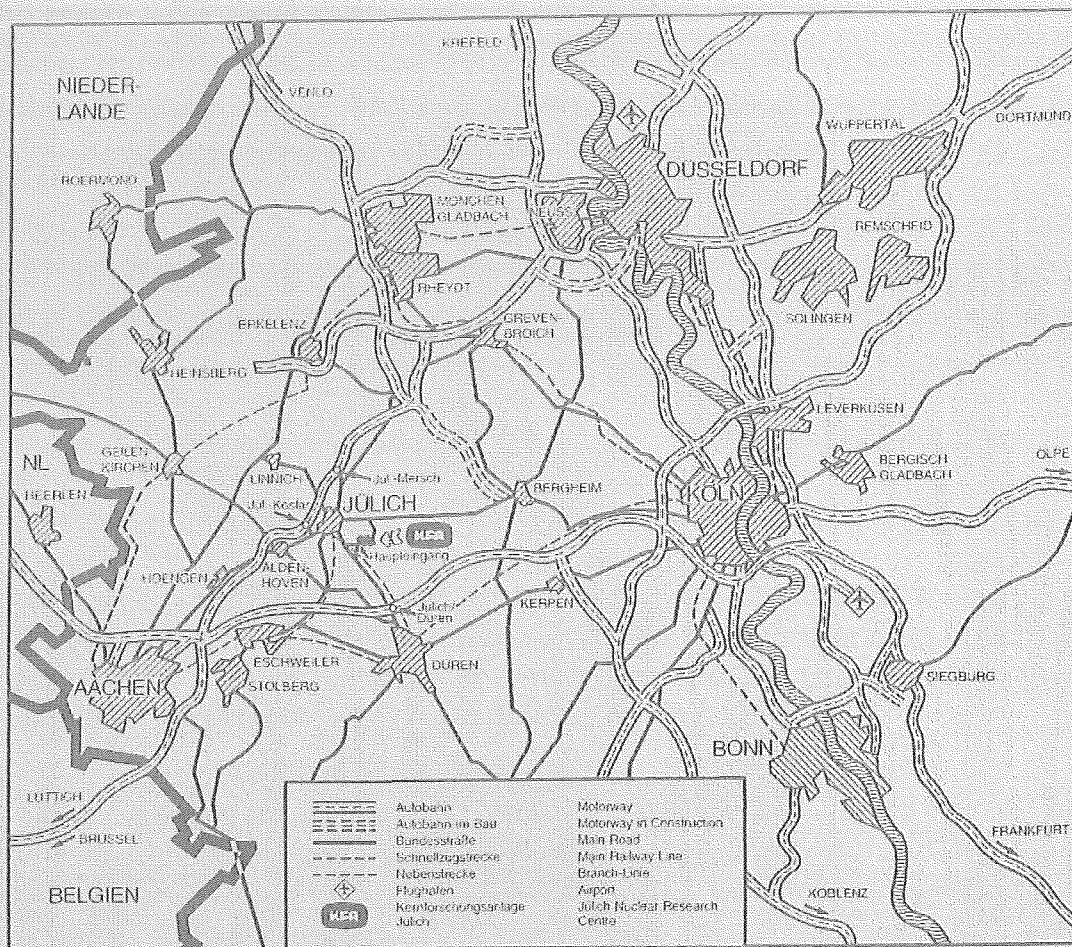
Institut für Kernphysik

**Spektren von Kernen in der Bleiregion
im Rahmen der RPA
mit OBE-G-Matrixwechselwirkungen**

von

A. von Kempis

Jüt-Spez-280
November 1984
ISSN 0343-7630



Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 280
 Institut für Kernphysik Jül-Spez-280

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 19 13 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

**Spektren von Kernen in der Bleiregion
im Rahmen der RPA
mit OBE-G-Matrixwechselwirkungen**

von

A. von Kempis

Kurzfassung

Auf der Basis eines existierenden Computerprogramms zur Berechnung von Teilchen-Loch-RPA-Matrixelementen (insbesondere) für Wechselwirkungen endlicher Reichweite sowie zur Lösung der Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen wurden die entsprechenden Matrixelemente für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne berechnet (und getestet!) und die zugehörigen RPA-Gleichungen gelöst.

Zur Berechnung der Kernspektren wurden Mesonenaustausch-G-Matrixwechselwirkungen anstelle phänomenologischer Ansätze verwendet. Erstere bilden nur einen Teil der effektiven NN-Wechselwirkung. Ein direkter Vergleich mit den experimentellen Spektren ist daher ebensowenig sinnvoll wie die Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten oder ein wertender Vergleich von TDA und RPA. Die Resultate lassen immerhin folgendes erkennen:

- (1) Die Dichteabhängigkeit der effektiven NN-Wechselwirkung.
- (2) Für die Zustände von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen spielt der $(\pi+\rho)$ -Austausch keine so dominierende Rolle wie für Zustände unnatürlicher Parität in doppelt-magischen Kernen.
- (3) Eine Approximation des fehlenden Teils der effektiven NN-Wechselwirkung durch Deltafunktionswechselwirkungen ist nicht ausreichend.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0. Einleitung	1
<u>I</u> TDA und RPA zur Berechnung der Spektren von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen sowie der von doppelt-magischen Kernen und ihren Teilchen-Loch-Isobaren	3
1. Die Formulierung von Kernstrukturgleichungen mit der Bewe- gungsgleichungsmethode nach Rowe (Equations-of-Motion Method)	5
1.1 Die Bewegungsgleichungen nach Rowe	5
1.2 Die Zerlegung des nuklearen Hamiltonoperators in einen diagonalen Einteilchen- und einen Restwechselwirkungsanteil durch das Hartree-Fock-Verfahren	8
1.3 Approximation zur Struktur angeregter Kernzustände	9
1.4 Die Zweiteilchen- bzw. Zweilochgleichungen	13
1.5 Die Teilchen-Loch-Gleichungen	20
1.6 Einige formale Eigenschaften der Bewegungsgleichungen	23
2. Die RPA-Gleichungen für drehimpulsgekoppelte Zustände de- finierter Parität	27
2.1 Anregungsoperatoren für drehimpulsgekoppelte Zustände de- finierter Parität (J^π)	27
2.2 Die Zweiteilchen- bzw. Zweilochgleichungen für "Kernzu- stände J^π "	29
2.3 Die Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen für "Kernzustände J^π "	34
3. Approximative Lösung des korrespondierenden Einteilchen- problems	38
3.1 Die Einteilchenbasis	38
3.2 Die Einteilchenenergien	40

	Seite
4. Verfahren zur Lösung von RPA-Gleichungssystemen mit reellen Potentialmatrizen	42
4.1 Die "prototypische" Lösungsmethode für das RPA-Gleichungssystem des doppelt-magischen Kerns	43
4.2 Die Lösungsprozedur für das kombinierte RPA-Gleichungssystem der beiden Teilchen-Loch-Isobare	48
4.3 Die Lösungsprozedur für das kombinierte RPA-Gleichungssystem konjugierter Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne	50
<u>II</u> Effektive Nukleon-Nukleon-Restwechselwirkungen und ihre Matrixdarstellungen	53
5. Effektive NN-Restwechselwirkungen	53
5.0 Effektive NN-Wechselwirkungen für Kernstrukturuntersuchungen	53
5.1 Effektive Restwechselwirkung für Zweiteilchen bzw. Zweilochkerne	56
5.2 Die $(\pi+\rho)$ -Austauschwechselwirkung	59
5.2.1 Ein-Pion-Austauschpotential (OPEP): Variablenseparation mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("I")	59
5.2.2 Konstruktion einer G-Matrix für das OPEP mittels einer simplen Korrelationsfunktion	66
5.2.3 Die ρ -Austauschwechselwirkung	71
5.2.4 Zusammenfassung: $(\pi+\rho)$ -Austauschwechselwirkung	72
5.3 G-Matrix-Wechselwirkung von Ein-Boson-Austauschpotentialen (OBEPs) aus Kernmaterierechnungen	73
5.4 Effektive "Migdal-Wechselwirkung"	75
5.5 Das Coulombpotential	79
6. Die Matrixdarstellungen der effektiven NN-Restwechselwirkungen	81
6.1 Matrixelemente von Deltafunktions-Wechselwirkungen	81
6.2 Matrixelemente von Wechselwirkungen endlicher Reichweite (Zentral- und Tensor-Wechselwirkungen)	88
6.2.1 Allgemeine Struktur	88
6.2.2 Radialintegration mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("II")	90
6.3 Testprozeduren für das Computerprogramm zur Berechnung der Matrixelemente	97

	Seite
<u>III</u> Die Resultate und ihre Interpretation	99
7.	99
7.1 Die Problematik des Ansatzes für die effektive Wechselwirkung	99
7.1.1 δ -Funktionswechselwirkungen und $(\pi+\rho)$ -Austauschwechselwirkungen	99
7.1.2 Dichteabhängigkeit effektiver NN-Restwechselwirkungen für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne und die OBE-G-Matrixwechselwirkungen	101
7.1.3 "Induzierte Wechselwirkungen" und "Kopplung zu Phononen"	102
7.2 TDA versus RPA	103
7.3 Varia zu einigen Kernspektren	104
7.4 Die Teilchen-Loch-Isobare	105
7.5 Schlußfolgerungen	106
Anhänge	
<u>Anhang 1</u> Fockraumdarstellung von Ein- und Zweikörperoperatoren mit Hilfe des Wickschen Theorems	108
<u>Anhang 2</u> Drehimpulskopplung	112
A2.1 Kopplung von zwei Drehimpulsen	112
A2.2 Lochzustände	114
A2.3 Drehimpulskopplung von Teilchen-Loch- sowie von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkonfigurationen	115
A2.4 Das Wigner-Eckart-Theorem	117
<u>Anhang 3</u> Energieskalen	118
A3.1 "Experimentelle Einteilchenenergien"	118
A3.2 Anregungsenergien in bezug auf den Kerngrundzustand	119

	Seite
<u>Anhang 4</u> Zu Kapitel 6	121
A4.1 Relationen zwischen den Restwechselwirkungsmatrixelementen in Teilchen-Loch und in Zweiteilchen-Kopplung	121
A4.2 Anmerkungen zur Berechnung des Spin-Winkel-Anteils der spinabhängigen Komponenten von Deltafunktions- und Zentralpotentialen	122
A4.3 "Rückwärtslaufende" direkte Teilchen-Loch-Matrixelemente	124
A4.4 Zur Berechnung der Tensorpotential-Matrixelemente	126
A4.5 "Bahndrehimpulsauswahlregeln"	128
A4.6 Isospinstruktur der Matrixelemente (von Wechselwirkungen endlicher Reichweite)	129
<u>Anhang 5</u> Die Spin-Winkelanteile der Wechselwirkungsmatrixelemente (tabellarisch)	131
Tabellenlegende	135
Tabellen	138
Figurenlegende	152
Figuren	153
Literaturverzeichnis	167
Danksagung	

0. Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Diplomarbeit sind die Energiespektren von Zuständen niedriger Anregungsenergie (wenige MeV) der acht dem doppelt-magischen Kern ^{208}Pb in der Nuklidkarte nächstgelegenen Kerne gerader Massenzahl. Dies sind die "Zweiteilchenkerne" ^{210}Po , ^{210}Bi und ^{210}Pb , die "Zweilochkerne" ^{206}Pb , ^{206}Tl und ^{206}Hg sowie die beiden "Teilchen-Loch-Isobare" von ^{208}Pb , ^{208}Bi und ^{208}Tl (siehe Figur 1).

In den fünfziger, sechziger und frühen siebziger Jahren wurden zahlreiche experimentelle und theoretische Arbeiten zu dieser Thematik publiziert. Ma und True (MT73) geben einen Vollständigkeit anstrebenden Überblick. Die theoretischen Arbeiten benutzen, mit einer Ausnahme, ad hoc gewählte effektive Wechselwirkungen mit Parametern, welche zur Reproduktion der experimentellen Kernspektren adjustiert werden. Meist wird die Tamm-Dancoff-Approximation (TDA), seltener die Random-Phase-Approximation (RPA) zugrundegelegt. Die Schwächen dieser Prozedur sind offensichtlich. Die erwähnte Ausnahme betrifft die Arbeiten von Kuo und Herling (KH71,72), welche im Rahmen der TDA effektive Wechselwirkungen verwenden, die mit dem Modell von Kuo und Brown (KB66) aus dem Hamada-Johnston-Potential deduziert werden. Ohne das Verdienst dieser Pionierarbeit schmälern zu wollen, seien ihre Schwachpunkte kurz angedeutet: Zum einen waren schon damals (Erk74) die heute (Hol81) als gesichert anzusehenden Zweifel an der Eignung phänomenologischer Nukleon-Nukleon-Potentiale für Kernstrukturuntersuchungen bekannt (und werden von den Autoren auch implizit berücksichtigt), zum anderen war (und ist) die Konvergenz der entsprechenden Reihenentwicklung der effektiven Wechselwirkung (siehe Kap. 5.1) und somit auch die Berechtigung der Verwendung der TDA nicht gesichert (siehe (Bk73) bzw. die Lehrbuchversionen von deShalit und Feshbach (dSF74, Ch.20) sowie von Ring und Schuck (RS80, Ch.4.3.2)).

Im vergangenen Jahrzehnt wurde den theoretischen Resultaten kaum wesentliches hinzugefügt. Dies ist die Folge der beträchtlichen Schwierigkeiten bei der Konstruktion verbesserter NN-Potentiale ((HEA72), (Erk74), (Hol81)) und der Berechnung effektiver Wechselwirkungen aus diesen NN-Potentialen ((NKS83), (Nak84)) einerseits sowie bei der Formulierung von über die Standardapproximationen (TDA und RPA bzw. die Landau-Migdal-Theorie endlicher Fermisysteme FFS) hinausgehenden Approximationsschemata ((Kle82), (SW83)) und deren praktischer Anwendung andererseits.

Was die Dynamik angeht, verläßt diese Arbeit den konventionellen Rahmen daher nicht, und dies war ursprünglich auch bezüglich der effektiven Wechselwirkung nicht geplant. Als primäres Ziel war schließlich die Berechnung der RPA-Restwechselwirkungsmatrixelemente von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen für Potentiale insbesondere endlicher Reichweite auf der Basis des von V. Klemt entwickelten Computerprogramms für doppelt-magische Kerne ins Auge gefaßt worden. Diese werden im Rahmen anderer Arbeiten benötigt: Zur Verallgemeinerung des Wechselwirkungsansatzes in der Quasiteilchen-RPA-Beschreibung von Kernen in der Region um sphärische, nicht doppelt-magische Kerne wie ^{146}Gd (Con84) sowie - in modifizierter Form - für die Arbeit von S. Drozd et al. auf der Basis des Artikels von Schwesinger und Wambach (SW83) zur "Fragmentation of Nuclear Strength Distributions by Two-Particle Two-Hole Excitations". Bezüglich der effektiven Wechselwirkung war an die von Speth et al. (SKW80) zur Berechnung magnetischer Eigenschaften von ^{208}Pb verwandte $(\pi+p+\delta)$ -Wechselwirkung gedacht (zu deren detaillierter Beschreibung siehe auch (Con84, App.E)). Die vor etwa einem halben Jahr in diesem Rahmen erzielten Resultate erwiesen sich jedoch als völlig unbefriedigend (s. Teil III), die anschließende Umstellung des Computerprogramms auf "bessere" effektive NN-Wechselwirkungen als dornige und zeitaufwendige, wenn auch (hoffentlich, jedenfalls aber für mich) lohnende Aufgabe. Der ungewöhnliche Umfang dieser Diplomarbeit ist also durch die wohl außergewöhnliche Spannweite der Thematik entschuldigt.

Teil I ist der TDA und RPA zur Berechnung der Spektren der oben spezifizierten Kerne sowie der Lösung der resultierenden Gleichungen gewidmet, Teil II dem Problem effektiver NN-Wechselwirkungen und deren Matrixdarstellung, Teil III schließlich der Präsentation und Diskussion der Resultate.

I. TDA und RPA zur Berechnung der Spektren von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen sowie der von doppelt-magischen Kernen und ihren Teilchen-Loch-Isobaren

In den ersten beiden Kapiteln werden die RPA-Gleichungen für die genannten Kerne abgeleitet. Im Prinzip sind sie natürlich wohlbekannt, und somit stellt sich die Frage nach Sinn und Zweck dieses Vorgehens. Für die in dieser Schrift hauptsächlich behandelten Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne ist diese dahingehend zu beantworten, daß es zwar einige gut lesbare Ableitungen der Gleichungen (MLE67),(RP69) gibt sowie Artikel, in welchen sie in abstrakter Form angeführt (BBG67),(KS76) oder sogar explizite formuliert (VG71),(IAS77),(AIK82) werden; jedoch ist die Interpretation der kondensierten Notation (für Anfänger) nicht ohne Tücken, und die anderen angeführten Quellen haben den Nachteil, die Gleichungen für Kerne ungerader Protonen- und Neutronenzahlen allenfalls implizit zu beinhalten. Kompliziert wird der Sachverhalt ferner durch die Möglichkeit zur Wahl verschiedener Phasenkonventionen für die Y -Amplituden (siehe Fußnote zu den RPA-Gleichungen (1.46) und (1.47)), so daß eine Herleitung der Gleichungen "from first principles" wohl nicht als a priori überflüssig anzusehen ist. Zum Fall der "Teilchen-Loch-Kerne" ist zu sagen, daß ich keine zitierfähige Quelle aufgefunden habe, welche die zur Lösung der RPA-Gleichungen für Kernzustände mit definiertem Gesamtdrehimpuls notwendige Phasenkonvention für Matrixelemente und Amplituden (2.28) auch nur andeutungsweise erwähnt.

Leser, denen es lediglich auf die präzise Formulierung der RPA-Gleichungen ankommt, können die Lektüre der ersten beiden Kapitel und Anhänge auf die folgenden Gleichungen reduzieren: Für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne (2.22), (2.23), (2.20), (2.12), (A2.20), (A2.15) und (A1.4c), für doppelt-magische Kerne bzw. ihre Teilchen-Loch-Isobare (2.31), (2.32), (1.19b) bzw. (2.33), (2.34), (1.20b) sowie (2.28), (2.24), (A2.15) und (A1.4c).

Im dritten Kapitel wird das numerische Verfahren zur Erzeugung der Einteilchenwellenfunktionen beschrieben und die Wahl experimenteller Einteilchenenergien begründet (die Prozedur zu deren Extraktion aus den experimentellen Daten findet sich in Anhang 3). Das vierte Kapitel ist der Reduktion der RPA-Gleichungen auf standardmäßig lösbare symmetrische Eigenwertprobleme gewidmet. Ich hoffe, daß die von V. Klemt konstruierte und von mir mit zahlreichen Kommen-

tarkarten versehene FORTRAN-Subroutine zur Lösung dieser Eigenwertprobleme anhand Kap. 4.1 für einschlägig Interessierte ohne weiteres nachvollziehbar ist.

1. Die Formulierung von Kernstrukturgleichungen mit der Bewegungsgleichungsmethode nach Rowe (Equations-of-Motion Method)

1.1 Die Bewegungsgleichungen nach Rowe

behandeln das Problem der nuklearen Spektroskopie von Kernen gerader Massenzahl in Analogie zum Problem des harmonischen Oszillators (Ro68,70). Im Gegensatz zu früheren linearisierten Bewegungsgleichungen ((Ro68) gibt einen ausführlichen Überblick über alle konkurrierenden Methoden) sind sie genau wie Greensfunktionenmethoden exakt im Sinne von der Schrödingergleichung äquivalent. Da alle Methoden in "tiefster Ordnung" der Approximation auf die TDA- und RPA-Gleichungen führen, benütze ich Rowe's Methode zu deren Ableitung, da sie gegenüber Greensfunktionenmethoden den Vorzug größerer Einfachheit hat.

Sei nun H der nukleare Hamiltonoperator, $|0\rangle$ der Kerngrundzustand und $|\kappa\rangle$ ein angeregter Zustand, so gelten die stationären Schrödingergleichungen

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle \quad (1.1a)$$

$$H|\kappa\rangle = E_\kappa|\kappa\rangle \quad (1.1b)$$

Wir bezeichnen einen Operator O_κ^+ als Anregungsoperator, wenn für ihn und seinen adjungierten Operator O_κ gilt

$$O_\kappa^+|0\rangle = |\kappa\rangle \quad (1.2a)$$

$$O_\kappa|0\rangle = 0 \quad (1.2b)$$

Dies gilt beispielweise für

$$O_\kappa^+ = |\kappa\rangle\langle 0|$$

aber auch für alle

$$O_\kappa^+ = |\kappa\rangle\langle 0| + \sum_{\mu, \nu \neq 0, \lambda} C_{\mu\nu} |\mu\rangle\langle \nu|$$

Die Chance, innerhalb eines gegebenen endlichen Raums eine passable Approximation zum Anregungsoperator O_κ^+ zu finden, erhöht sich natürlich dadurch, daß O_κ^+ durch (1.2) nicht eindeutig bestimmt wird. Aus (1.1) und (1.2) folgt

$$[H, O_K^+] |0\rangle = (E_K - E_0) O_K^+ |0\rangle \quad (1.3)$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich für einen beliebigen Operator δR_K

$$\langle 0 | [\delta R_K, [H, O_K^+]] | 0 \rangle = (E_K - E_0) \langle 0 | [\delta R_K, O_K^+] | 0 \rangle \quad (1.4)$$

Mit der Definition des Anregungsoperators (1.2) ist diese "Bewegungsgleichung" der Schrödingergleichung (1.1) äquivalent, da δR_K ein beliebiger Operator ist.

Wir können (1.4) in einer symmetrischen Form schreiben, wenn wir die Jacobi-Identität für Kommutatoren

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (1.5)$$

benutzen. Da $|0\rangle$ ein Eigenzustand von H ist, gilt

$$\langle 0 | [H, [O_K^+, \delta R_K]] | 0 \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | [O_K^+, \delta R_K] | 0 \rangle = 0 \quad (1.6)$$

und daraus folgt mit der Jacobi-Identität (1.5)

$$\langle 0 | [[\delta R_K, H], O_K^+] | 0 \rangle = \langle 0 | [\delta R_K, [H, O_K^+]] | 0 \rangle \quad (1.7)$$

Wir definieren den symmetrisierten Doppelkommutator

$$[A, B, C] := \frac{1}{2} \{ [A, [B, C]] + [[A, B], C] \} \quad (1.8)$$

und erhalten so die zur Bewegungsgleichung (1.4) äquivalente Gleichung

$$\langle 0 | [\delta R_K, H, O_K^+] | 0 \rangle = (E_K - E_0) \langle 0 | [\delta R_K, O_K^+] | 0 \rangle \quad (1.9)$$

Diese symmetrischere Form der Bewegungsgleichungen ist nicht aus lediglich ästhetischen Gründen vorzuziehen; ich komme darauf im vierten Abschnitt dieses Kapitels zurück.

Die Bewegungsgleichungen (1.9) haben gegenüber den Schrödingergleichungen (1.1) den Vorzug, daß sich physikalisch motivierte Approximationen zur Struktur der angeregten Zustände, die über die übliche Schalenmodellnäherung (s.u.)

hinausgehen, unmittelbar anbieten. Da die Observablen im allgemeinen weniger von den absoluten Wellenfunktionen als von gewissen Beziehungen zwischen ihnen abhängen - man denke etwa an Übergangswahrscheinlichkeiten - geben sie ferner eher als die Schrödingergleichungen eine Formulierung des Problems als Funktion von Observablen, nämlich neben der Anregungsenergie als Funktion gewisser Überlappintegrale. (Dies wird in Kap. 1.4 deutlich werden.) In Rowe's Worten:

"The method may be regarded as a straightforward extension of the shell model to admit the complexities of wave functions but (at the same time) to bypass them by concentrating on the quantities of direct physical interest."

(Ro68,p.155)

Natürlich sind die Bewegungsgleichungen (1.9) ebensowenig exakt lösbar wie die ihnen äquivalenten Schrödingergleichungen (1.1). Wir müssen uns mit einer Approximation $|\phi\rangle$ zum nuklearen Grundzustand $|0\rangle$ begnügen und in praxi folgende Bewegungsgleichungen zu lösen versuchen:

$$\langle \phi | [\delta R_K, H, O_K^+] | \phi \rangle = \Omega_K \langle \phi | [\delta R_K, O_K^+] | \phi \rangle \quad (1.10a)$$

mit

$$\Omega_K = E_K - E_0 \quad (1.10b)$$

Wie Rowe (Ro70, Ch.13) ausführlich begründet, hängen die Bewegungsgleichungen (1.10) von der Qualität der Approximation $|\phi\rangle$ zu $|0\rangle$ nicht empfindlich ab. Für Kerne, die sich in guter Näherung im Schalenmodellbild beschreiben lassen, liegt es natürlich nahe, als Approximation $|\phi\rangle$ einen Schalenmodellgrundzustand zu wählen. Noch besser als ein solcher wäre der Hartree-Fock-Grundzustand, da das Hartree-Fock-Verfahren - bei Kenntnis der Wechselwirkung V zwischen den Nukleonen - die selbstkonsistente Berechnung des "Mittleren Feldes", d.h. des Einteilchenanteils von H , sowie auch der "Restwechselwirkung" gestattet. Im folgenden Abschnitt präsentiere ich daher in enger Anlehnung an Rowe (Ro70, Ch.9.2, App.C) die Zerlegung des nuklearen Hamiltonoperators in einen diagonalen Einteilchen- und einen Restwechselwirkungsanteil durch das Hartree-Fock-Verfahren.

1.2 Die Zerlegung des nuklearen Hamiltonoperators in einen diagonalen Einteilchen- und einen Restwechselwirkungsanteil durch das Hartree-Fock-Verfahren

Diesen wie den folgenden Abschnitten liegt die Formulierung der Quantenmechanik in der Fockraumdarstellung zugrunde ("zweite Quantisierung" für Fermionen). Im Anhang 1 habe ich wohlbekannte Definitionen und Theoreme zusammengestellt. Mit diesen ist es ein leichtes, die folgende Darstellung eines nuklearen Hamiltonoperators, der nur Zweinukleonenwechselwirkungen V enthält, herzuleiten (siehe Anhang 1):

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\nu, \nu'} \{ T_{\nu\nu'} + \sum_{\mu\mu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} \langle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'} \rangle \} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} \langle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'} \rangle \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \rangle \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} : a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'} : \end{aligned} \quad (A1.10)$$

Hierbei ist $| \rangle$ das Teilchen-Loch-Vakuum

$$| \rangle = \prod_{i \in A} a_i^{\dagger} | - \rangle \quad (A1.7)$$

auf welches auch die Normalordnung des Produkts im letzten Summanden Bezug nimmt; $| - \rangle$ ist der nukleonische Vakuumzustand.

Der erste Summand ist ein Einteilchenoperator - siehe (A1.4) - und kann durch geeignete Wahl der Einteilchenbasis diagonalisiert werden:

$$T_{\nu\nu'} + \sum_{\mu\mu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} \langle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'} \rangle = \delta_{\nu\nu'} \epsilon_{\nu} \quad (1.11)$$

Diese Gleichung muß iterativ (selbstkonsistent) gelöst werden, da sie das Teilchen-Loch-Vakuum enthält, welches seinerseits von der gesuchten Einteilchenbasis abhängt. Offenbar ist sie die Formulierung der Hartree-Fock-Einteilchengleichungen in der Fockraumdarstellung. Wir bezeichnen die Einteilchenbasis, die (1.11) diagonalisiert, als HF-Basis. Für diese gilt natürlich

$$\langle a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'} \rangle = \delta_{\mu\mu'} \sum_{i=1}^A \delta_{\mu i} \quad (1.12)$$

und der Hamiltonoperator (A1.10) nimmt in ihr die Form

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V_{ij} a_i^{\dagger} a_j + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu',\nu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} :a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'}: \quad (1.13)$$

an, wobei

$$\epsilon_{\nu} = T_{\nu\nu} + \sum_{j=1}^A V_{j\nu} a_j^{\dagger} a_j \quad (1.14)$$

Der Einteilchenanteil

$$H_0 = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V_{ij} a_i^{\dagger} a_j \quad (1.15)$$

des Hamiltonoperators (1.13) ist in einer Basis von A-Nukleonen-Slaterdeterminanten (A1.1) diagonal und sein Grundzustand ist das HF-Teilchen-Loch-Vakuum $|>$ mit der HF-Grundzustandsenergie

$$E_0 = \langle |H_0| \rangle = \sum_{i=1}^A \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V_{ij} a_i^{\dagger} a_j \quad (1.16)$$

Da der Vakuumerwartungswert normalgeordnete Produkte verschwindet - (A1.8) - gilt übrigens auch

$$\langle |H| \rangle = \langle |H_0| \rangle = E_0 \quad (1.17)$$

Für den Restwechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators haben wir nun den expliziten Ausdruck

$$V_{\text{res}} = \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu',\nu'} V_{\mu\nu\mu'\nu'} :a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'}: \quad (1.18)$$

1.3 Approximationen zur Struktur angeregter Kernzustände

Doppelt-magische Kerne lassen sich im Schalenmodellbild gut beschreiben. Daher liegt die Annahme nahe, daß in den Zuständen niedriger Anregungsenergie lediglich ein Nukleon aus einer vollbesetzten Schale in eine unbesetzte angehoben wird und ein Loch zurückläßt, d.h.

$$0_{\kappa}^{+} = \sum_{\substack{n,j \\ (t_n=t_j)}} x_{nj}^{\kappa} a_n^{+} a_j \quad (1.19a)$$

(t_r = Isospinquantenzahl des Einteilchenzustands r). Dies ist gerade die übliche Schalenmodellnäherung, die zu den Tamm-Dancoff-Gleichungen führt. Da der Grundzustand des doppelt-magischen Kerns sich vom reinen HF-Grundzustand unterscheidet, ist die Besetzungswahrscheinlichkeit für Lochniveaux kleiner als eins und für Teilchenniveaux größer als null. Ein Anregungszustand kann also auch durch Vernichtung von Teilchen-Loch-Paaren im Grundzustand (sog. Grundzustandskorrelationen) erzeugt werden, entsprechend

$$0_{\kappa}^{+} = \sum_{\substack{n,j \\ (t_n=t_j)}} \{x_{nj}^{\kappa} a_n^{+} a_j - y_{nj}^{\kappa} a_j^{+} a_n\} \quad (1.19b)$$

Die Zustände der Teilchen-Loch-Isobare doppelt-magischer Kerne ($\kappa(t,-t)$) werden im Schalenmodellbild durch ein zusätzliches Nukleon in den Teilchenniveaux mit Isospinquantenzahl t des jeweiligen doppelt-magischen Kerns sowie ein fehlendes Nukleon in den Lochniveaux mit Isospinquantenzahl $(-t)$ beschrieben; t hat für Neutroneneinteilchenzustände den Wert $1/2$ und für Protoneneinteilchenzustände den Wert $-1/2$. Die den Ansätzen (1.19) korrespondierenden Anregungsoperatoren für die beiden "Teilchen-Loch-Isobare" sind daher

$$0_{\kappa(t,-t)}^{+} = \sum_{\substack{n,j \\ (t_n=t, t_j=-t)}} x_{nj}^{\kappa(t,-t)} a_n^{+} a_j \quad (1.20a)$$

und

$$0_{\kappa(t,-t)}^{+} = \sum_{\substack{n,j \\ (t_n=t, t_j=-t)}} x_{nj}^{\kappa(t,-t)} a_n^{+} a_j - \sum_{\substack{n,j \\ (t_n=-t, t_j=t)}} y_{nj}^{\kappa(t,-t)} a_j^{+} a_n \quad (1.20b)$$

mit $t = -1/2$ für dasjenige Isobar, das ein Proton mehr enthält als der doppelt-magische Kern. Gelegentlich werden im folgenden doppelt-magische Kerne und ihre Teilchen-Loch-Isobare gemeinsam behandelt; die in (1.19), (1.20) auftretenden Summationen werden dort mit $\sum'_{n,j}$ bezeichnet.

Wir beschreiben also die Zustände der Teilchen-Loch-Isobare - insbesondere auch ihre Grundzustände - formal als angeregte Zustände des jeweiligen dop-

pelt-magischen Kerns. Eine analoge Beschreibung bietet sich auch für die Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne an. Die TDA, welche Grundzustandskorrelationen nicht berücksichtigt, ist für Zweiteilchenkerne bzw. Zweilochkerne durch

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{m,n} X_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+} \quad (1.21a)$$

bzw.

$$O_{\lambda}^{+} = \sum_{i,j} X_{ij}^{\lambda} a_i a_j \quad (1.21b)$$

gegeben. Der Strich am Summationszeichen weist auch hier auf die besondere Behandlung der Isospinquantenzahlen bei der Summation hin. Haben die Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne gerade Protonen- und gerade Neutronenzahl (gg-Kerne), so gilt $t_m=t_n=t$ bzw. $t_i=t_j=t$, mit $t=1/2$ für die Isotope und $t=-1/2$ für die Isotone des doppelt-magischen Kerns. Haben sie hingegen ungerade Protonen- und ungerade Neutronenzahl (uu-Kerne), so gilt $t_n=-t_m$ bzw. $t_j=-t_i$. In beiden Fällen ist eine Reduktion des Konfigurationsraumes möglich, wie anhand des Zweiteilchenfalls exemplarisch demonstriert sei.

Für gg-Kerne ergibt sich im Sinne irgendeiner eindeutigen Anordnung der Einteilchenzustände (z.B. energetisch) wegen der Antikommutatorrelation (A1.2) mit geeigneter Indexumbenennung

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{m < n} (X_{mn}^{\tau} - X_{nm}^{\tau}) a_m^{+} a_n^{+}$$

oder

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{m < n} \tilde{X}_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+}$$

einerseits, und

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{m > n} (X_{mn}^{\tau} - X_{nm}^{\tau}) a_m^{+} a_n^{+}$$

oder

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{m > n} \tilde{X}_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+} = - \sum_{m < n} \tilde{X}_{nm}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+}$$

andererseits.

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (1.10) führt zum selben Gleichungssystem für \tilde{X}_{nm}^{τ} wie für X_{mn}^{τ} (jeweils $m > n$). Aus Gründen, die später erst (Kap. 2) klar werden, empfiehlt sich folgende Schreibweise:

$$O_{\tau}^{+} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} X_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+}$$

mit

$$X_{nm}^{\tau} = -X_{mn}^{\tau}$$

Für uu-Kerne hingegen ergibt sich, ebenfalls aufgrund der Antikommutatorrelation (A1.2), mit der Bezeichnung v_a für alle Quantenzahlen eines Einteilchenzustands a außer der Isospinquantenzahl t_a :

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{\substack{m,n \\ (t_n = -t_m)}} X_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+}$$

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{v_m, v_n} \sum_t X_{v_m t v_n - t}^{\tau} a_{v_m t}^{+} a_{v_n - t}^{+}$$

$$O_{\tau}^{+} = \sum_{v_m, v_n} (X_{v_m - 1/2, v_n 1/2}^{\tau} - X_{v_m 1/2, v_n - 1/2}^{\tau}) a_{v_m - 1/2}^{+} a_{v_n 1/2}^{+}$$

In diesem Fall kann (o.B.d.A.) folgende Schreibweise gewählt werden:

$$O_{\tau}^{+} = \sum'_{m,n} X_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+}$$

mit

$$X_{nm}^{\tau} = -X_{mn}^{\tau}$$

wobei der Strich am Summationszeichen $t_m = -1/2$, $t_n = 1/2$ bedeutet.

Die Berücksichtigung von Grundzustandskorrelationen ist für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne möglicherweise problematischer als für doppelt-magische Kerne und ihre Teilchen-Loch-Isobare. Eine naheliegende Möglichkeit ist zwar

$$O_{\tau}^{+} = \sum'_{m;n} X_{mn}^{\tau} a_m^{+} a_n^{+} - \sum'_{j;i} Y_{ji}^{\tau} a_j^{+} a_i^{+} \quad (1.22a)$$

$$O_{\lambda}^{+} = \sum'_{i;j} X_{ij}^{\lambda} a_i a_j - \sum'_{n;m} Y_{nm}^{\lambda} a_n a_m \quad (1.22b)$$

mit

$$\sum'_{r;s} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\substack{r,s \\ (t_r = t_s \text{ fix } (1/2 \text{ oder } -1/2))}} & \text{für gg-Kerne} \\ \sum_{\substack{r,s \\ (t_s = -t_r = 1/2)}} & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (1.23)$$

und

$$X_{nm}^{\tau} = -X_{mn}^{\tau} \quad Y_{ji}^{\tau} = -Y_{ij}^{\tau} \quad (1.24a)$$

$$X_{ji}^{\lambda} = -X_{ij}^{\lambda} \quad Y_{nm}^{\lambda} = -Y_{mn}^{\lambda} \quad (1.24b)$$

Diese Ansätze führen bei Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (1.10) zu Gleichungssystemen, die den mit den Ansätzen (1.19), (1.20) resultierenden in der algebraischen Struktur sehr ähneln. Vielleicht ist gerade dies der Grund für ihre Beliebtheit, denn was spricht etwa gegen einen zusätzlichen Term der Form

$$\sum_{m,i} Z_{mi}^{\tau} a_m^+ a_i^+ \quad (1.25)$$

im Ansatz (1.22a)? Man kann beispielweise so argumentieren: Für die tiefliegenden Zustände doppelt-magischer Kerne spielen Teilchen-Loch-Korrelationen eine wichtigere Rolle als Zweiteilchen-Zweilochkorrelationen, und dies legt die Erwartung nahe, daß der Term (1.25) keinesfalls weniger wichtig ist als der in (1.22a) gegenüber dem TDA-Ansatz (1.21a) hinzugekommene. Im Rahmen dieser Arbeit werden aber solche Spekulationen nicht weiter verfolgt.

1.4 Die Zweiteilchen- bzw. Zweilochgleichungen

Ohne die Approximation zum nuklearen Grundzustand schon zu Beginn spezifizieren zu müssen, können wir nun die den Ansätzen (1.22) für die Anregungsoperatoren O_{τ}^+ bzw. O_{λ}^+ entsprechenden Approximationen zu den Bewegungsgleichungen (1.10) formulieren.

Ganz allgemein gilt, daß der für die Wahl der "beliebigen Operatoren" δR_{κ} in (1.10) zur Verfügung stehende Raum auf den durch die zu den Anregungsoperatoren adjungierten Operatoren O_{κ} aufgespannten Raum beschränkt ist. Ich zeige dies exemplarisch anhand des Zweiteilchenfalls. Bezeichne δO_{τ}^+ die Operatoren aus dem von den O_{τ}^+ aufgespannten Raum, δO_{τ} die Operatoren aus dem von den O_{τ} aufgespannten Raum und δS_{τ} alle Operatoren, die nicht aus dem von den O_{τ} aufgespannten Raum stammen. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi | \delta O_{\tau}^+ O_{\tau}^+ | \phi \rangle &= \langle \text{Zweilochzustand} | \text{Zweiteilchenzustand} \rangle = 0 \\ \langle \phi | O_{\tau}^+ \delta O_{\tau}^+ | \phi \rangle &= \langle \text{Zweilochzustand} | \text{Zweiteilchenzustand} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \langle \phi | [\delta O_{\tau}^+, O_{\tau}^+] | \phi \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

und allgemein

$$\begin{aligned} \delta S_{\tau}^{+} |\phi\rangle &\perp 0_{\tau}^{+} |\phi\rangle \\ \Leftrightarrow \langle \phi | [\delta S_{\tau}, 0_{\tau}^{+}] | \phi \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Setzt man nun für δR_{τ} in (1.10) einen Operator $\delta 0_{\tau}^{+}$ ein, so verschwindet die rechte Seite identisch und die Gleichungen liefern keine Informationen mehr über das Spektrum; setzt man einen Operator der Form $\delta R_{\tau} = \delta 0_{\tau}^{+} + \delta S_{\tau}$ ein, so bleibt die rechte Gleichungsseite und somit die gesamte Gleichung die gleiche wie für die Wahl $\delta R_{\tau} = \delta 0_{\tau}$. Q.E.D.

Also gilt mit dem Ansatz (1.22a) für Zweiteilchenkerne

$$\delta R_{\tau} = \delta 0_{\tau} = \sum_{n'; m'}' \delta C_{n' m'}^{\tau} a_{n'} a_{m'} - \sum_{i'; j'}' \delta C_{i' j'}^{\tau} a_{i'} a_{j'} \quad (1.28)$$

und mit dem Ansatz (1.22b) für Zweilochkerne

$$\delta R_{\lambda} = \delta 0_{\lambda} = \sum_{j'; i'}' \delta C_{j' i'}^{\lambda} a_{j'}^{+} a_{i'}^{+} - \sum_{m'; n'}' \delta C_{m' n'}^{\lambda} a_{m'}^{+} a_{n'}^{+} \quad (1.29)$$

Die Summanden in (1.28) und (1.29) sind linear unabhängig und die Koeffizienten δC beliebig. Statt nun (1.28) bzw. (1.29) zusammen mit (1.22a) bzw. (1.22b) in die Bewegungsgleichungen (1.10) einzusetzen und anschließend einen Koeffizientenvergleich durchzuführen, wählen wir von Anfang an spezielle Operatoren δR_{τ} bzw. δR_{λ} .

Für Zweiteilchenkerne ergibt sich mit dem Ansatz (1.22a) für 0_{τ}^{+} , der Symmetrierelation (1.24a) für die Y-Amplitude und der speziellen Wahl $\delta 0_{\tau} = a_n a_m$, aus den Bewegungsgleichungen (1.10) zum einen

$$\begin{aligned} &\sum_{m; n}' \langle \phi | [a_n a_m, H, a_m^{+} a_n^{+}] | \phi \rangle X_{mn}^{\tau} + \sum_{j; i}' \langle \phi | [a_n a_m, H, a_j^{+} a_i^{+}] | \phi \rangle Y_{ij}^{\tau} \\ &= \Omega_{\tau} \left\{ \sum_{m; n}' \langle \phi | [a_n a_m, a_n^{+} a_m^{+}] | \phi \rangle X_{mn}^{\tau} + \sum_{j; i}' \langle \phi | [a_n a_m, a_j^{+} a_i^{+}] | \phi \rangle Y_{ij}^{\tau} \right\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Mit $\delta 0_{\tau} = a_i a_j$ ergibt sich zum anderen

$$\begin{aligned} &\sum_{m; n}' \langle \phi | [a_i a_j, H, a_m^{+} a_n^{+}] | \phi \rangle X_{mn}^{\tau} + \sum_{j; i}' \langle \phi | [a_i a_j, H, a_j^{+} a_i^{+}] | \phi \rangle Y_{ij}^{\tau} \\ &= \Omega_{\tau} \left\{ \sum_{m; n}' \langle \phi | [a_i a_j, a_m^{+} a_n^{+}] | \phi \rangle X_{mn}^{\tau} + \sum_{j; i}' \langle \phi | [a_i a_j, a_j^{+} a_i^{+}] | \phi \rangle Y_{ij}^{\tau} \right\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Mit den bekannten Relationen

$$H^+ = H \quad (1.32a)$$

$$\langle \phi | A | \phi \rangle = \langle \phi | A^+ | \phi \rangle^* \quad (1.32b)$$

$$[A, B]^+ = -[A^+, B^+] \quad (1.32c)$$

und ferner

$$[A, B, C]^+ = [A^+, B^+, C^+] \quad (1.32d)$$

$$[A, B, C] = [C, B, A] \quad (1.32e)$$

können wir (1.30) und (1.31) zu einer Matrixgleichung zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^+ & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\tau \\ Y^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ V^+ & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\tau \\ Y_\tau \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{m'n'mn} &= \langle \phi | [a_n, a_m, H, a_m^+ a_n^+] | \phi \rangle \\ B_{m'n'ij} &= \langle \phi | [a_n, a_m, H, a_j^+ a_i^+] | \phi \rangle \\ C_{i'j'ij} &= \langle \phi | [a_i, a_j, H, a_j^+ a_i^+] | \phi \rangle \end{aligned} \quad (1.34a)$$

und

$$\begin{aligned} U_{m'n'mn} &= \langle \phi | [a_n, a_m, a_m^+ a_n^+] | \phi \rangle \\ V_{m'n'ij} &= \langle \phi | [a_n, a_m, a_j^+ a_i^+] | \phi \rangle \\ W_{i'j'ij} &= \langle \phi | [a_i, a_j, a_j^+ a_i^+] | \phi \rangle \end{aligned} \quad (1.34b)$$

sowie ferner zeigen, daß alle Untermatrizen (1.34) auf den Diagonalen von (1.33) hermitesch sind. Die Hermitezität der Matrizen ist übrigens nur für die Form der Bewegungsgleichungen mit dem symmetrisierten Doppelkommutator [, ,] garantiert und folgt bei der Verwendung von $|\phi\rangle$ statt $|0\rangle$ in (1.4) nicht in jedem Fall. Aus diesem Grund verwenden wir die symmetrisierte Form (1.10).

Für Zweilochkerne ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen (1.10) mit dem Ansatz (1.22b) für 0_λ^+ ebenfalls zwei linear unabhängige Gleichungen, die eine für $\delta R_\lambda = a_j^+, a_i^+$ und die andere für $\delta R_\lambda = a_m^+, a_n^+$. Wendet man zur Umformung beider Gleichungen die Relationen (1.32) sowie die Symmetrierelationen (1.24b) für die Y-Amplitude an und multipliziert ebenfalls beide Gleichungen mit (-1), so ergibt sich in Matrixformulierung

$$\begin{pmatrix} -C^* & -B^T \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\lambda \\ Y^\lambda \end{pmatrix} = \Omega_\lambda \begin{pmatrix} W^* & V^T \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\lambda \\ Y^\lambda \end{pmatrix} \quad (1.35a)$$

und nach einer komplexen Konjugation beider Seiten

$$\begin{pmatrix} -C & -B^+ \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda*} \\ Y^{\lambda*} \end{pmatrix} = \Omega_\lambda^* \begin{pmatrix} W & V^+ \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda*} \\ Y^{\lambda*} \end{pmatrix} \quad (1.35b)$$

mit

$$\Omega_\lambda = E_\lambda - E_0 \quad (1.35c)$$

Zur Berechnung der Matrizen muß man die Approximation $|\phi\rangle$ zum Grundzustand des doppelt-magischen Kerns spezifizieren. Die naheliegendste Wahl ist, wie gesagt, der Hartree-Fock-Grundzustand $| \rangle$. Die Berechnung der Untermatrizen der "metrischen Matrix" auf der rechten Gleichungsseite ist simpel

$$U_{m'n'mn} = \langle [a_n, a_m, a_m^+ a_n^+] | \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1.36)$$

$$V_{m'n'ij} = \langle [a_n, a_m, a_j^+ a_i^+] | \rangle = 0 \quad (1.37)$$

$$W_{i'j'ij} = \langle [a_i, a_j, a_j^+ a_i^+] | \rangle = -\delta_{ii'} \delta_{jj'} \quad (1.38)$$

Die metrische Matrix ist also zeitunabhängig, und für zeitunabhängige X- und Y-Amplituden in (1.22) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle [O_\kappa^+, \delta R_\kappa] | \rangle = 0 \quad (1.39)$$

$\kappa = \tau \text{ oder } \kappa = \lambda$

Nach (1.6) ist genau dies die Bedingung für die Äquivalenz der Bewegungsgleichungen in ihrer nicht symmetrisierten Form (1.4) und ihrer symmetrisierten Form (1.9), welche in unserer Approximation also ebenfalls gilt, obwohl der Hartree-Fock-Grundzustand $| \rangle$ kein Eigenzustand des nuklearen Hamiltonoperators ist.

Dieses Resultat verkürzt die Berechnung der Matrix auf der linken Gleichungsseite, da wir die nicht-symmetrisierte Form der Gleichungen (1.4) verwenden können. Die Berechnung der A-Matrix führe ich sehr ausführlich vor:

$$A_{m'n'mn} = \langle [a_n, a_m, [H, a_m^+ a_n^+]] | \rangle \quad (1.40)$$

und da $a_m | \rangle = 0$, ergibt sich

$$A_{m'n'mn} = \langle | a_n, a_m, H a_m^+ a_n^+ | \rangle - \langle | a_n, a_m, a_m^+ a_n^+ | \rangle$$

Gemäß (1.13), (1.18) gilt

$$A_{m'n'mn} = \sum_v \epsilon_v \langle m'n' | a_v^+ a_v | mn \rangle - \sum_{k \leq A} \epsilon_k \delta_{mm'} \delta_{nn'} - \frac{1}{2} (1-1) \sum_{i,j}^A v_{ij} \delta_{mm'} \delta_{nn'} + \langle m'n' | V_{res} | mn \rangle - \delta_{mm'} \delta_{nn'} \langle | V_{res} | \rangle$$

Da

$$\sum_v \epsilon_v \langle m'n' | a_v^+ a_v | mn \rangle = (\epsilon_m + \epsilon_n) \delta_{mm'} \delta_{nn'} + \sum_{k \leq A} \epsilon_k \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

und

$$\langle | V_{res} | \rangle = 0 \text{ nach (1.18), (A1.8), folgt}$$

$$A_{m'n'mn} = (\epsilon_m + \epsilon_n) \delta_{mm'} \delta_{nn'} + \langle m'n' | V_{res} | mn \rangle$$

Da ferner in (1.18) Normalordnung in bezug auf das HF-Teilchen-Loch-Vakuum gemeint ist, gilt

$$\begin{aligned} \langle m'n' | V_{res} | mn \rangle &= \frac{1}{4} v_{m'n'mn} \langle | a_n, a_m, a_m^+, a_n^+, a_n a_m a_m^+ a_n^+ | \rangle \\ &+ \frac{1}{4} v_{m'n'nm} \langle | a_n, a_m, a_m^+, a_n^+, a_m a_n a_m^+ a_n^+ | \rangle \\ &+ \frac{1}{4} v_{n'm'mn} \langle | a_n, a_m, a_n^+, a_m^+, a_n a_m a_m^+ a_n^+ | \rangle \\ &+ \frac{1}{4} v_{n'm'nm} \langle | a_n, a_m, a_n^+, a_m^+, a_m a_n a_m^+ a_n^+ | \rangle \end{aligned}$$

und aufgrund der Antikommutatorrelation (A1.2) ergibt sich in Verbindung mit der Orthonormiertheit von Slaterdeterminanten

$$\langle m'n' | V_{res} | mn \rangle = \frac{1}{4} (v_{m'n'mn} - v_{m'n'nm} - v_{n'm'mn} + v_{n'm'nm})$$

Wegen der Antisymmetrie der Matrixelemente $v_{\mu\nu\mu'\nu'}$ - siehe (A1.4c) - folgt zum guten Schluß

$$A_{m'n'mn} = (\epsilon_m + \epsilon_n) \delta_{mm'} \delta_{nn'} + v_{m'n'mn} \quad (1.41)$$

Für die B-Matrix gilt

$$\begin{aligned} B_{m'n'ij} &= \langle [a_n, a_m, [H, a_j^+ a_i^+]] | \rangle \\ B_{m'n'ij} &= -\langle [a_n, a_m, a_j^+ a_i^+ H] | \rangle \end{aligned} \quad (1.42)$$

was übrigens wegen der Antikommutatorrelationen (A1.2) und (A1.3) äquivalent ist

$$B_{m'n'ij} = \langle [a_j^+ a_n, a_i^+ a_m, H] | \rangle$$

Der Einteilchenanteil verschwindet

$$-\langle [a_n, a_m, a_j^+ a_i^+ H_0] | \rangle = E_0 \langle m'i^{-1} n'j^{-1} | \rangle = 0$$

und für den verbleibenden Restwechselwirkungsanteil ergibt die analog der für die A-Matrix durchgeführte Rechnung

$$\begin{aligned} B_{m'n'ij} &= -\langle [a_n, a_m, a_j^+ a_i^+ V_{\text{res}}] | \rangle = \langle m'i^{-1} n'j^{-1} | V_{\text{res}} | \rangle \\ B_{m'n'ij} &= V_{m'n'ij} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Die Berechnung der C-Matrix schließlich

$$C_{i'j'ij} = \langle [a_i, a_{j'}, [H, a_j^+ a_i^+]] | \rangle \quad (1.44)$$

ist mit den nun hinreichend demonstrierten Verfahren problemlos:

$$\begin{aligned} C_{i'j'ij} &= \langle [a_j^+ a_i^+ H a_i, a_{j'}] | \rangle - \langle [H a_j^+ a_i^+ a_i, a_{j'}] | \rangle \\ C_{i'j'ij} &= \sum_v \epsilon_v \langle i^{-1} j^{-1} | a_v^+ a_v | i'^{-1} j'^{-1} \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k,\ell}^A v_{k\ell k\ell} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \\ &\quad + \langle i^{-1} j^{-1} | V_{\text{res}} | i'^{-1} j'^{-1} \rangle - \sum_{k \leq A} \epsilon_k \delta_{ii'} \delta_{jj'} + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell}^A v_{k\ell k\ell} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \\ &\quad - \langle | V_{\text{res}} | \rangle \delta_{ii'} \delta_{jj'} \\ C_{i'j'ij} &= \sum_{\substack{k \leq A \\ k \neq i,j}} \epsilon_k \delta_{ii'} \delta_{jj'} - \sum_{k \leq A} \epsilon_k \delta_{ii'} \delta_{jj'} + \langle i^{-1} j^{-1} | V_{\text{res}} | i'^{-1} j'^{-1} \rangle \\ C_{i'j'ij} &= -(\epsilon_i + \epsilon_j) \delta_{ii'} \delta_{jj'} + V_{iji'j'} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Zusammenfassend lauten die sog. RPA-Gleichungen für Zweiteilchenkerne

$$\text{mit } \begin{pmatrix} A & B \\ -B^+ & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\tau \\ Y^\tau \end{pmatrix} = \Omega_\tau \begin{pmatrix} X^\tau \\ Y^\tau \end{pmatrix} \quad (1.46a)$$

$$\Omega_\tau = E_\tau - E_0 \quad (1.46b)$$

und für Zweilochkerne

$$\text{mit } \begin{pmatrix} C & B^+ \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\lambda*} \\ Y^{\lambda*} \end{pmatrix} = \Omega_\lambda^* \begin{pmatrix} X^{\lambda*} \\ Y^{\lambda*} \end{pmatrix} \quad (1.47a)$$

$$\Omega_\lambda = E_\lambda - E_0 \quad (1.47b)$$

wobei

$$A_{m'n'mn} = (\varepsilon_m + \varepsilon_n) \delta_{mm'} \delta_{nn'} + V_{m'n'mn} \quad (1.41)$$

$$B_{m'n'ij} = V_{m'n'ij} \quad (1.43)$$

$$C_{i'j'ij} = -(\varepsilon_{i'} + \varepsilon_j) \delta_{ii'} \delta_{jj'} + V_{iji'j'} \quad (1.45)$$

und der Summationsvorschrift (1.23) sowie den Symmetrierelationen (1.24)*.

Die entsprechenden TDA-Gleichungen erhält man, indem man Y^τ bzw. Y^λ null setzt.

Im Rahmen der RPA ist die physikalische Bedeutung der X- und Y-Amplituden un-
schwer einzusehen. So gilt einerseits wegen (1.2)

$$\langle 0 | [a_n a_m, 0_\tau^+] | 0 \rangle = \langle mn | \tau \rangle \quad (1.48a)$$

$$\langle 0 | [a_j a_i, 0_\tau^+] | 0 \rangle = \langle ij | \tau \rangle \quad (1.48b)$$

$$\langle 0 | [a_j^+ a_i^+, 0_\lambda^+] | 0 \rangle = \langle i^{-1} j^{-1} | \lambda \rangle \quad (1.48c)$$

$$\langle 0 | [a_n^+ a_m^+, 0_\lambda^+] | 0 \rangle = \langle m^{-1} n^{-1} | \lambda \rangle \quad (1.48d)$$

*

Die Vorzeichenkonvention, die Ring und Schuck (RS80, Ch.8.8) anstatt (1.22) wählen, führt zu einem anderen Vorzeichen für die B-Matrix (1.43) und in der drehimpulsgekoppelten B-Matrix (2.22d) dementsprechend zu einer zusätzlichen Phase. Mit Hilfe der Symmetrierelationen für drehimpulsgekoppelte Amplituden und Matrixelemente kann man bei dieser Phasenkonvention übrigens auch zu einem (2.22) entsprechenden Gleichungssystem gelangen, in welchem B die Form (2.22d) hat, das Wechselwirkungsmatrixelement in C (2.22e) jedoch mit einer zusätzlichen Phase

$(-1)^{k_i + k_j + k_{i'} + k_{j'}}$ zu multiplizieren ist (Def. von k_r : (2.27)).

und andererseits mit (1.22)

$$\langle 1 | [a_n a_m, 0_\tau^+] | \rangle = X_{mn}^\tau \quad (1.49a)$$

$$\langle 1 | [a_j a_i, 0_\tau^+] | \rangle = Y_{ij}^\tau \quad (1.49b)$$

$$\langle 1 | [a_j^+ a_i^+, 0_\lambda^+] | \rangle = X_{ij}^\lambda \quad (1.49c)$$

$$\langle 1 | [a_n a_m, 0_\lambda^+] | \rangle = Y_{mn}^\lambda \quad (1.49d)$$

Der Vergleich zeigt, daß die Absolutquadrate der X- und Y-Amplituden innerhalb der RPA die Näherungsausdrücke für die Wahrscheinlichkeit sind, mit der die angeregten Kernzustände die entsprechenden Zweiteilchen- bzw. Zweilochzustände enthalten. An dieser Stelle wird auch, wie angekündigt, "deutlich", daß die Bewegungsgleichungen (1.10), die statt stationärer Wellenfunktionen eher die Berechnung von Anregungsoperatoren gestatten, das Problem der nuklearen Spektroskopie als Funktion "gewisser Überlappintegrale" formulieren, und welche dies sind.

1.5 Die Teilchen-Loch-Gleichungen

Für die "Teilchen-Loch-Kerne" - den doppelt-magischen sowie seine beiden Teilchen-Loch-Isobare - ergibt Einsetzen der Ansätze (1.19b) bzw. (1.20b) in die Bewegungsgleichungen (1.10) folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{nj} \{ \langle \phi | [a_i^+ a_m, H, a_n^+ a_j] | \phi \rangle X_{nj}^\kappa - \langle \phi | [a_i^+ a_m, H, a_j^+ a_n] | \phi \rangle Y_{nj}^\kappa \} \quad (1.50a)$$

$$= (E_\kappa - E_0) \sum_{nj} \{ \langle \phi | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \phi \rangle X_{nj}^\kappa - \langle \phi | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \phi \rangle Y_{nj}^\kappa \}$$

$$\sum_{nj} \{ \langle \phi | [a_m^+ a_i, H, a_n^+ a_j] | \phi \rangle X_{nj}^\kappa - \langle \phi | [a_m^+ a_i, H, a_j^+ a_n] | \phi \rangle Y_{nj}^\kappa \} \quad (1.50b)$$

$$= (E_\kappa - E_0) \sum_{nj} \{ \langle \phi | [a_m^+ a_i, a_n^+ a_j] | \phi \rangle X_{nj}^\kappa - \langle \phi | [a_m^+ a_i, a_j^+ a_n] | \phi \rangle Y_{nj}^\kappa \}$$

Für den doppelt-magischen Kern ergibt sich bei Anwendung der Relationen (1.32) auf (1.50b) in Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\kappa \\ Y^\kappa \end{pmatrix} = \Omega_\kappa \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\kappa \\ Y^\kappa \end{pmatrix} \quad (1.51a)$$

mit

$$\Omega_{\kappa} = E_{\kappa} - E_0 \quad (1.51b)$$

und

$$A_{\text{minj}} = \langle \phi | [a_i^+ a_m, H, a_n^+ a_j] | \phi \rangle \quad (1.52a)$$

$$B_{\text{minj}} = -\langle \phi | [a_i^+ a_m, H, a_j^+ a_n] | \phi \rangle \quad (1.52b)$$

$$U_{\text{minj}} = \langle \phi | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \phi \rangle \quad (1.52c)$$

$$V_{\text{minj}} = -\langle \phi | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \phi \rangle \quad (1.52d)$$

sowie der Summationsvorschrift (1.19b).

A und U sind hermitesch, B symmetrisch und V antisymmetrisch (folgt mit (1.32)). Wählt man den Hartree-Fock-Grundzustand als Approximation zum Grundzustand des doppelt-magischen Kerns, so erhält man für diesen die sog. Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen in der Form

$$\text{mit} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\kappa} \\ Y^{\kappa} \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa} \begin{pmatrix} X^{\kappa} \\ Y^{\kappa} \end{pmatrix} \quad (1.53a)$$

$$\Omega_{\kappa} = E_{\kappa} - E_0 \quad (1.53b)$$

sowie

$$A_{\text{minj}} = (\epsilon_n - \epsilon_j) \delta_{mn} \delta_{ij} + \langle m i^{-1} | v_{\text{res}} | n j^{-1} \rangle \quad (1.54a)$$

$$\langle m i^{-1} | v_{\text{res}} | n j^{-1} \rangle = v_{mj in} \quad (1.54b)$$

$$B_{\text{minj}} = \langle m i^{-1} n j^{-1} | v_{\text{res}} | \rangle = v_{mn ij} \quad (1.54c)$$

Für die X- und Y-Amplituden gilt

$$\langle m i^{-1} |_{\kappa} \rangle = \langle 0 | [a_i^+ a_m, 0_{\kappa}^+] | 0 \rangle \approx \langle | [a_i^+ a_m, 0_{\kappa}^+] | \rangle = X_{mi}^{\kappa} \quad (1.55a)$$

$$\langle i m^{-1} |_{\kappa} \rangle = \langle 0 | [a_m^+ a_i, 0_{\kappa}^+] | 0 \rangle \approx \langle | [a_m^+ a_i, 0_{\kappa}^+] | \rangle = Y_{mi}^{\kappa} \quad (1.55b)$$

Für die Teilchen-Loch-Isobare nimmt das Gleichungssystem (1.50) in Matrixnotation explizite folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} A(t, -t) & B(t, -t) \\ -B(-t, t)^* & -A(-t, t)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\kappa}(t, -t) \\ Y^{\kappa}(t, -t) \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa}(t, -t) \begin{pmatrix} U(t, -t) & V(t, -t) \\ V(-t, t)^* & U(-t, t)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\kappa}(t, -t) \\ Y^{\kappa}(t, -t) \end{pmatrix} \quad (1.56a)$$

mit

$$\Omega_{\kappa}(t, -t) = E_{\kappa}(t, -t) - E_0 \quad (1.56b)$$

und

$$A_{\nu_m t' \nu_i t'', \nu_n t' \nu_j t''}^{(t', t'')} = \langle \phi | [a_{\nu_i t''}^+ a_{\nu_m t'}, H, a_{\nu_n t'}^+ a_{\nu_j t''}] | \phi \rangle \quad (1.57a)$$

$$B_{\nu_m t' \nu_i t'', \nu_n t'' \nu_j t'}^{(t', t'')} = -\langle \phi | [a_{\nu_i t''}^+ a_{\nu_m t'}, H, a_{\nu_n t''}^+ a_{\nu_j t'}] | \phi \rangle \quad (1.57b)$$

und entsprechend für $U(t', t'')$, $V(t', t'')$

sowie der Summationsvorschrift (1.20b).

Offensichtlich sind $A(t', t'')$ und $U(t', t'')$ hermitesch, $B(t', t'')$ ist aber im Unterschied zum Fall des doppelt-magischen Kerns nicht symmetrisch, auch nicht hermitesch; vielmehr gilt

$$B(t', t'') = B(t'', t')^T \quad (1.58a)$$

und für $V(t', t'')$:

$$V(t', t'') = -V(t'', t')^T \quad (1.58b)$$

(T bedeutet Transposition.)

Mit Ebert's Notation (ERW78)

$$(-1/2, 1/2) \hat{=} 1 \quad (1.59a)$$

$$(1/2, -1/2) \hat{=} 2 \quad (1.59b)$$

gelten die Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen für die beiden Teilchen-Loch-Isobare in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_2^* & -A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\kappa}(1) \\ Y^{\kappa}(1) \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa}(1) \begin{pmatrix} X^{\kappa}(1) \\ Y^{\kappa}(1) \end{pmatrix} \quad (1.60a)$$

$$\Omega_{\kappa}(1) = E_{\kappa}(1) - E_0 \quad (1.60b)$$

für das Proton=Teilchen-Neutron=Loch-Isobar, und

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_1^* & -A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{\kappa(2)} \\ \gamma^{\kappa(2)} \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa(2)} \begin{pmatrix} \chi^{\kappa(2)} \\ \gamma^{\kappa(2)} \end{pmatrix} \quad (1.61a)$$

$$\Omega_{\kappa(2)} = E_{\kappa(2)} - E_0 \quad (1.61b)$$

für das Neutron=Teilchen-Proton=Loch-Isobar, mit den Untermatrizen

$$A_{\nu_m t' \nu_i t'', \nu_n t' \nu_j t''}^{(t', t'')} = (\varepsilon_{\nu_n t' - \varepsilon_{\nu_j t''}}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} + \langle \nu_m t' (\nu_i t'')^{-1} | V_{\text{res}} | \nu_n t' (\nu_j t'')^{-1} \rangle \quad (1.62a)$$

$$\langle \nu_m t' (\nu_i t'')^{-1} | V_{\text{res}} | \nu_n t' (\nu_j t'')^{-1} \rangle = V_{\nu_m t' \nu_j t'', \nu_i t'' \nu_n t'} \quad (1.62b)$$

$$B_{\nu_m t' \nu_i t'', \nu_n t'' \nu_j t'}^{(t', t'')} = \langle \nu_m t' (\nu_i t'')^{-1} \nu_n t'' (\nu_j t')^{-1} | V_{\text{res}} | \rangle = V_{\nu_m t' \nu_n t'' \nu_i t'' \nu_j t'} \quad (1.62c)$$

1.6 Einige formale Eigenschaften der Bewegungsgleichungen

Rowe (Ro68) untersucht die Eigenschaften der Bewegungsgleichungen (1.10) für Anregungsoperatoren der Form

$$O_{\kappa}^+ = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^{\kappa} n_{\alpha}^+ \quad (1.63)$$

die zu den Bewegungsgleichungen

$$\sum_{\beta} \langle \phi | [n_{\alpha}, H, n_{\beta}^+] | \phi \rangle Z_{\beta}^{\kappa} = \Omega_{\kappa} \sum_{\beta} \langle \phi | [n_{\alpha}, n_{\beta}^+] | \phi \rangle Z_{\beta}^{\kappa} \quad (1.64a)$$

oder abkürzend

$$\sum_{\beta} M_{\alpha\beta} Z_{\beta}^{\kappa} = \Omega_{\kappa} \sum_{\beta} N_{\alpha\beta} Z_{\beta}^{\kappa} \quad (1.64b)$$

führen. Alle hier betrachteten Anregungsoperatoren (1.19)-(1.22) sind von der Form (1.63), und Rowe's Resultate* gelten daher für die Teilchen-Loch-Gleichungen (1.50), (1.51) ebenso wie für die Zweiteilchengleichungen (1.33) und die Zweilochgleichungen (1.35).

* "Rowe's Resultate" stellen die direkte Verallgemeinerung der erstmals von Thouless (Th61) beschriebenen Eigenschaften von RPA-Gleichungen dar (der folgende Abschnitt bringt nur den im Rahmen dieser Arbeit unmittelbar relevanten Teil).

Stabilitätsbedingung (Ro68), (Ro70, Ch.14.8)

Die Forderung, daß ϕ den nuklearen Grundzustand "hinreichend gut" approximiert, impliziert, daß die Matrix M nur reelle nichtnegative Eigenwerte besitzt. Dies gilt also insbesondere für die RPA-Matrizen (1.46), (1.47), (1.51) und (1.56) sowie die korrespondierenden TDA-Matrizen.

Orthogonalität und Normierung der Lösungsvektoren

Für zwei Lösungen Z^μ, Z^ν von (1.63) gilt wegen der Hermitezität der Matrizen M und N

$$\sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} M_{\alpha\beta} Z_\beta^\nu = \Omega_\mu \sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} N_{\alpha\beta} Z_\beta^\nu = \Omega_\nu^* \sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} N_{\alpha\beta} Z_\beta^\nu$$

Falls $\Omega_\mu \neq \Omega_\nu^*$, müssen beide Seiten der Gleichung verschwinden, die Vektoren Z^μ und Z^ν sind also orthogonal im Sinn der Metrik N. Sofern die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, gilt für $\mu=\nu$

$$\Omega_\mu \sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} N_{\alpha\beta} Z_\beta^\mu > 0$$

Dies legt die Normierung

$$\sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} N_{\alpha\beta} Z_\beta^\mu = 1 \quad (1.65)$$

und wegen der Orthogonalität der Lösungen für $\mu \neq \nu$ folgt

$$\sum_{\alpha\beta} Z_\alpha^{\mu*} N_{\alpha\beta} Z_\beta^\nu = \delta_{\mu\nu} \quad (1.66)$$

In der RPA hat (1.58) im Zweiteilchen- bzw. Zweilochfall die Form:

$$\sum_{m;n} X_{mn}^{\tau*} X_{mn}^\tau - \sum_{i;j} Y_{ij}^{\tau*} Y_{ij}^\tau = \delta_{\tau\tau'} \quad (1.67a)$$

$$\sum_{i;j} X_{ij}^{\lambda*} X_{ij}^\lambda - \sum_{m;n} Y_{mn}^{\lambda*} Y_{mn}^\lambda = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (1.67b)$$

und im Teilchen-Loch-Fall

$$\sum_{m,i} (X_{mi}^{\mu*} X_{mi}^\nu - Y_{mi}^{\mu*} Y_{mi}^\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad (1.67c)$$

"Spuriöse" Lösungen

Die Erhaltungsgrößen korrespondierenden Operatoren S kommutieren mit dem Hamiltonoperator

$$[H, S] = 0 \quad (1.68)$$

und jeder solche Operator ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen mit Energie $\Omega=0$, da

$$\langle \phi | [\delta R, [H, S]] | \phi \rangle = 0 \quad (1.69)$$

Für die hier betrachteten sphärischen, nicht-supraleitenden Kerne kommen etwa der Gesamtimpuls-, der Gesamtdrehimpuls-, der Teilchenzahl- und der Kernladungszahloperator in Frage. Dies sind Einteilchenoperatoren und daher von der Form des Teilchen-Loch-Anregungsoperators (1.19) für doppelt-magische Kerne (wegen (A1.4), und da sie die Kernladung erhalten). Für die in dieser Arbeit behandelten nicht doppelt-magischen Kerne gibt es daher keine spuriosen Lösungen, die von kontinuierlichen Symmetrien des Hamiltonoperators herrühren, da die den erhaltenen Observablen korrespondierenden Operatoren im Raum der Anregungsoperatoren (1.20)-(1.22) nicht vorkommen. Letzteres gilt auch für die den diskontinuierlichen Symmetrien des Hamiltonoperators entsprechenden Operatoren (z.B. den Paritätsoperator).

Vollständigkeitsrelationen (Ro68)

Falls es keine spuriosen Lösungen gibt, sind die Lösungen von (1.64) vollständig, d.h. jeder Operator U von der Form eines Anregungsoperators (1.19)-(1.22) kann nach ihnen entwickelt werden:

$$U_\beta = \sum_{\kappa} a_{\kappa} Z_{\beta}^{\kappa} \quad (1.70)$$

Wegen der Orthonormierung (1.58) folgt

$$\sum_{\kappa} a_{\kappa} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^{\kappa *} N_{\alpha\beta} Z_{\beta}^{\kappa} = \sum_{\kappa} a_{\kappa} \delta_{\kappa\kappa'} = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^{\kappa *} N_{\alpha\beta} U_{\beta}$$

$$a_k = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^{k*} N_{\alpha\beta} U_{\beta} \quad (1.71)$$

Durch Einsetzen in (1.62) folgt

$$U_Y = \sum_{\kappa} \sum_{\alpha\beta} Z_{\alpha}^{\kappa*} N_{\alpha\beta} U_{\beta} Z_Y^{\kappa} \quad (1.72)$$

und für den Einheitsvektor $U_{\beta} = \delta_{\beta\gamma}$

$$\sum_{\kappa} \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^{\kappa*} Z_{\beta}^{\kappa} N_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \quad (1.73)$$

In der RPA ergibt sich im Teilchen-Loch-Fall

$$\sum_{\nu} (X_{mi}^{\nu*} X_{m'i'}^{\nu} - Y_{mi}^{\nu*} Y_{m'i'}^{\nu}) = \delta_{mm'} \delta_{ii'} \quad (1.74)$$

Im Teilchen-Loch-Fall ist der Raum der zu den Anregungsoperatoren (1.19) bzw. (1.20) adjungierten Operatoren gleich dem Raum der Anregungsoperatoren selbst. Im Zweiteilchenfall hingegen ist der Raum der zu den Anregungsoperatoren (1.22a) adjungierten Operatoren gleich dem Raum der Anregungsoperatoren (1.22b) für Zweilochkerne, und vice versa. Einen beliebigen Operator aus der Vereinigung beider Räume können wir nach den Zweiteilchen- bzw. Zweilochlösungsoperatoren entwickeln. Die Relationen (1.70)-(1.73) gelten analog, und es ergeben sich die Beziehungen

$$\sum_{\tau} X_{mn}^{\tau*} X_{m'n'}^{\tau} - \sum_{\lambda} Y_{mn}^{\lambda*} Y_{m'n'}^{\lambda} = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1.75a)$$

$$\sum_{\lambda} X_{ij}^{\lambda*} X_{i'j'}^{\lambda} - \sum_{\tau} Y_{ij}^{\tau*} Y_{i'j'}^{\tau} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} \quad (1.75b)$$

Ein Vergleich mit Ring und Schuck (RS80) zeigt, daß deren entsprechende Gleichung (8.189) nur die erste dieser beiden Vollständigkeitsrelationen richtig wiedergeben kann.

2. Die RPA-Gleichungen für drehimpulsgekoppelte Zustände definierter Parität

2.1 Anregungsoperatoren für drehimpulsgekoppelte Zustände definierter Parität (J^π)

Bislang wurde nicht in Betracht gezogen, daß die zu untersuchenden Kerne sphärisch sind und daher die Eigenzustände des Hamiltonoperators simultan als Eigenzustände des Gesamtdrehimpulsoperators gewählt werden können. Wegen der Dominanz der starken und elektromagnetischen relativ zu den paritätsverletzenden schwachen Wechselwirkungen im nuklearen Hamiltonoperator können dessen Eigenzustände außerdem simultan als Eigenzustände des Paritätsoperators gewählt werden. Die explizite Berücksichtigung dieser Symmetrien des nuklearen Hamiltonoperators verringert die Dimensionen der zu diagonalisierenden RPA-Matrizen ganz beträchtlich. Zur Berechnung eines Zustands mit gegebenen Gesamtdrehimpuls- und Paritätsquantenzahlen J^π kommen in den den Approximationen (1.19)-(1.22) entsprechenden Anregungsoperatoren ja nun nur noch die Konfigurationen der Parität π in Frage, die zum Gesamtdrehimpuls J koppeln. Die Kopplung von Teilchen-Loch- sowie von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkonfigurationen wird im Anhang 2 durchgeführt. Für Teilchen-Loch-Zustände resultiert

$$|v_1 v_2^{-1}, JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1 m_1 j_2 - m_2 | JM \rangle |v_1 m_1 (v_2 m_2)^{-1}\rangle \quad (A2.14)$$

mit der Notation $a = v_a m_a$ für die Quantenzahlen $a = t_a, s_a = 1/2, \ell_a, j_a, m_a$ eines Einteilchenniveaus. Der Zustand (A2.14) hat die Parität

$$\pi = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} \quad (2.1a)$$

Für Zweiteilchen- bzw. Zweilochzustände ergibt sich

$$|v_1 v_2, JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\delta} r_1 r_2} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |v_1 m_1 v_2 m_2\rangle \quad (A2.15a)$$

$$|v_1^{-1} v_2^{-1}, J-M\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\delta} r_1 r_2} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |(v_1 m_1)^{-1} (v_2 m_2)^{-1}\rangle \quad (A2.15c)$$

mit der Parität

$$\pi = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} \quad (2.1b)$$

Diese Relationen legen die Form der den approximativen Anregungsoperatoren O_{κ}^{+} (1.19b) und O_{τ}^{+} (1.22a) bzw. O_{λ}^{+} (1.22b) für Anregungszustände mit Gesamtdrehimpuls- und Paritätsquantenzahlen J entsprechenden Anregungsoperatoren $O_{\kappa(J^{\pi M})}^{+}$ und $O_{\tau(J^{\pi M})}^{+}$ bzw. $O_{\lambda(J^{\pi M})}^{+}$ fest:

$$O_{\kappa(J^{\pi M})}^{+} = \sum'_{\nu_n; \nu_j} \{ \chi_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^{\pi M})} \sum_{m_n m_j} (-1)^{j_j - m_j} \langle j_n m_n j_j - m_j | JM \rangle a_{\nu_n m_n}^{+} a_{\nu_j m_j}^{+} - \gamma_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^{\pi M})} \sum_{m_n m_j} (-1)^{j_n - m_n} \langle j_j m_j j_n - m_n | JM \rangle a_{\nu_j m_j}^{+} a_{\nu_n m_n}^{+} \} \quad (2.2a)$$

mit $(-1)^{\ell_n + \ell_j} = \pi \quad (2.2b)$

$$O_{\tau(J^{\pi})}^{+} = \sum'_{\nu_m; \nu_n} \frac{\gamma_{\nu_m \nu_n}^{\tau(J^{\pi})}}{\sqrt{1+\delta_{\nu_m \nu_n}}} \sum_{m_m m_n} \langle j_m m_m j_n m_n | JM \rangle a_{\nu_m m_m}^{+} a_{\nu_n m_n}^{+} + \sum'_{\nu_j; \nu_i} \frac{\gamma_{\nu_i \nu_j}^{\tau(J^{\pi M})}}{\sqrt{1+\delta_{\nu_i \nu_j}}} \sum_{m_i m_j} \langle j_j m_j j_i m_i | JM \rangle a_{\nu_j m_j}^{+} a_{\nu_i m_i}^{+} \quad (2.3a)$$

mit $(-1)^{\ell_m + \ell_n} = (-1)^{\ell_i + \ell_j} = \pi \quad (2.3b)$

$$O_{\lambda(J^{\pi M})}^{+} = \sum'_{\nu_i; \nu_j} \frac{\chi_{\nu_i \nu_j}^{\lambda(J^{\pi M})}}{\sqrt{1+\delta_{\nu_i \nu_j}}} \sum_{m_i m_j} \langle j_i m_i j_j m_j | JM \rangle a_{\nu_i m_i}^{+} a_{\nu_j m_j}^{+} + \sum'_{\nu_n; \nu_m} \frac{\gamma_{\nu_n \nu_m}^{\lambda(J^{\pi M})}}{\sqrt{1+\delta_{\nu_n \nu_m}}} \sum_{m_n m_m} \langle j_n m_n j_m m_m | JM \rangle a_{\nu_n m_n}^{+} a_{\nu_m m_m}^{+} \quad (2.4a)$$

mit $(-1)^{\ell_i + \ell_j} = (-1)^{\ell_m + \ell_n} = \pi \quad (2.4b)$

Bei der Formulierung der Ansätze (2.3), (2.4) sind die Symmetrierelationen (1.24) für die Y -Amplituden besonders zu beachten! Folgt man der Argumentation

im Kap. 1.3, so sieht man ohne weiteres, daß die den Symmetrierelationen (1.24) für die X- und Y-Amplituden im Zweiteilchen- bzw. Zweilochfall entsprechenden Symmetrierelationen für die "drehimpulsgekoppelten Amplituden" wegen der Symmetrierelation (A2.6b) für Clebsch-Gordan-Koeffizienten so lauten:

$$X_{\nu_n \nu_m}^{\tau(J^{\pi}M)} = (-1)^{j_m + j_n - J + 1} X_{\nu_m \nu_n}^{\tau(J^{\pi}M)} \quad (2.5a)$$

$$Y_{\nu_j \nu_i}^{\tau(J^{\pi}M)} = (-1)^{j_i + j_j - J + 1} Y_{\nu_i \nu_j}^{\tau(J^{\pi}M)} \quad (2.5b)$$

$$X_{\nu_j \nu_i}^{\lambda(J^{\pi}M)} = (-1)^{j_i + j_j - J + 1} X_{\nu_i \nu_j}^{\lambda(J^{\pi}M)} \quad (2.5c)$$

$$Y_{\nu_n \nu_m}^{\lambda(J^{\pi}M)} = (-1)^{j_n + j_m - J + 1} Y_{\nu_m \nu_n}^{\lambda(J^{\pi}M)} \quad (2.5d)$$

2.2 Die Zweiteilchen- bzw. Zweilochgleichungen für "Kernzustände J^{π} "

Für Zweiteilchenkerne hat der in den Bewegungsgleichungen auftretende "beliebige Operator aus dem Raum der zu den $O_{\tau(J^{\pi}M)}^{+}$ adjungierten Operatoren" die Form

$$\delta O_{\tau(J^{\pi}M)} = \sum_{\nu_n'; \nu_m'} \frac{\delta C_{\nu_n' \nu_m'}^{\tau(J^{\pi}M)}}$$

$$\sum_{m_n m_n'} \langle j_m, m_m, j_n, m_n | J^{\pi}M \rangle a_{\nu_n, m_n} a_{\nu_m, m_m}$$

$$- \sum_{\nu_i'; \nu_j'} \frac{\delta C_{\nu_j' \nu_i'}^{\tau(J^{\pi}M)}}$$

$$\sum_{m_i m_j} \langle j_j, m_j, j_i, m_i | J^{\pi}M \rangle a_{\nu_i, m_i} a_{\nu_j, m_j} \quad (2.6a)$$

mit

$$(-1)^{j_m' + j_n'} = (-1)^{j_i' + j_j'} = \pi' \quad (2.6b)$$

Die Prozedur ist nun ganz analog der in Kap. 1.4 durchgeführten; die resultierenden allgemeinen Zweiteilchengleichungen lauten in Matrixform

$$\begin{pmatrix} P(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) & Q(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) \\ Q^{\dagger}(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) & C(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\tau(\bar{j}^{\pi} \bar{h})} \\ Y^{\tau(\bar{j}^{\pi} \bar{h})} \end{pmatrix} = \Omega_{\tau(\bar{j}^{\pi} \bar{h})} \begin{pmatrix} U(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) & V(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) \\ V^{\dagger}(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) & W(\bar{j}^{\pi} \bar{h}', \bar{j}^{\pi} \bar{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\tau(\bar{j}^{\pi} \bar{h})} \\ Y^{\tau(\bar{j}^{\pi} \bar{h})} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

mit

$$A_{\nu_m \nu_{n'} \nu_m \nu_n}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{\nu_m \nu_{n'}}} \sqrt{1+\delta_{\nu_m \nu_n}}} \sum_{m_m, m_n} \langle j_m, m_m, j_n, m_n | J' M' \rangle \langle j_m m_m j_n m_n | J M \rangle \cdot \langle \phi | [a_{\nu_{n'}, n'}, a_{\nu_m, m_m}, H, a_{\nu_m, m_m}^+ a_{\nu_n, m_n}^+] | \phi \rangle \quad (2.8a)$$

mit

$$(-1)^{\ell_{m'} + \ell_{n'}} = \pi', \quad (-1)^{\ell_m + \ell_n} = \pi \quad (2.8b)$$

usw. analog. In der RPA nehmen die Untermatrizen der metrischen Matrix gemäß den Relationen (1.36)-(1.38) und der Orthogonalitätsrelation für Clebsch-Gordan-Koeffizienten (A2.4a) folgende Form an:

$$U_{\nu_m \nu_{n'} \nu_m \nu_n}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{\nu_m \nu_{n'}}} \sqrt{1+\delta_{\nu_m \nu_n}}} \sum_{m_m, m_n} \langle j_m, m_m, j_n, m_n | J' M' \rangle \langle j_m m_m j_n m_n | J M \rangle \cdot \delta_{\nu_m \nu_m} \delta_{m_m, m_m} \delta_{\nu_{n'} \nu_n} \delta_{m_m, m_n}$$

$$U_{\nu_m \nu_{n'} \nu_m \nu_n}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = \frac{\delta_{\pi' \pi} \delta_{J' J} \delta_{M' M}}{1+\delta_{\nu_m \nu_n}} \delta_{\nu_m \nu_m} \delta_{\nu_{n'} \nu_n} \quad (2.9)$$

$$V_{\nu_m \nu_{n'} \nu_i \nu_j}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = 0 \quad (2.10)$$

$$W_{\nu_i \nu_j \nu_i \nu_j}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = - \frac{\delta_{\pi' \pi} \delta_{J' J} \delta_{M' M}}{1+\delta_{\nu_i \nu_j}} \delta_{\nu_i \nu_i} \delta_{\nu_j \nu_j} \quad (2.11)$$

Bei der Berechnung der RPA-Matrix fallen natürlich alle Terme weg, die auch bei der Berechnung der RPA-Matrix für drehimpulsungekoppelte Zustände nicht definierter Parität wegfielen; die in (1.41)-(1.45) auftretenden Matrixelemente $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ werden durch die drehimpulsgekoppelten $\nu_{\alpha} \nu_{\beta}, J' M' V_{\gamma} \nu_{\delta}, J M$ ersetzt, die nach dem Wigner-Eckart-Theorem (A2.20) in J und M diagonal sind. Mit der Notation (pp für Zweiteilchenkopplung)

$$F_{\nu_{\alpha} \nu_{\beta} \nu_{\gamma} \nu_{\delta}}^{pp(J \pi)} = \langle \nu_{\alpha} \nu_{\beta}, J \pi | V | \nu_{\gamma} \nu_{\delta}, J \pi \rangle \quad (2.12)$$

folgt

$$A_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = \frac{\epsilon_{\nu_m} + \epsilon_{\nu_n}}{1 + \delta_{\nu_m \nu_n}} \delta_{\pi' \pi} \delta_{J' J} \delta_{M' M} \delta_{\nu_m' \nu_m} \delta_{\nu_n' \nu_n} + F_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{pp(J \pi)} \quad (2.13)$$

$$B_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = F_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{pp(J \pi)} \quad (2.14)$$

$$C_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{(J' \pi' M', J \pi M)} = - \frac{\epsilon_{\nu_i} + \epsilon_{\nu_j}}{1 + \delta_{\nu_i \nu_j}} \delta_{\pi' \pi} \delta_{J' J} \delta_{M' M} \delta_{\nu_i' \nu_i} \delta_{\nu_j' \nu_j} + F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{pp(J \pi)} \quad (2.15)$$

Als Lösungen eines von den magnetischen Quantenzahlen M und M' unabhängigen Gleichungssystems hängen die X - und Y -Amplituden von diesen ebenfalls nicht ab. Explizite formuliert lauten die RPA-Gleichungen für Zweiteilchenkernzustände mit Gesamtdrehimpuls J und Parität π

$$\sum_{\nu_m' \nu_n} \left\{ \frac{\epsilon_{\nu_m} + \epsilon_{\nu_n}}{1 + \delta_{\nu_m \nu_n}} \delta_{\nu_m' \nu_m} \delta_{\nu_n' \nu_n} + F_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{pp(J \pi)} \right\} \chi_{\nu_m' \nu_n}^{\tau(J \pi)} \quad (2.16a)$$

$$+ \sum_{\nu_j' \nu_i} F_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{pp(J \pi)} \gamma_{\nu_i \nu_j}^{\tau(J \pi)} = \Omega_{\tau(J \pi)} \frac{\chi_{\nu_m' \nu_n'}^{\tau(J \pi)}}{1 + \delta_{\nu_m' \nu_n'}} - \sum_{\nu_m' \nu_n} F_{\nu_i' \nu_j' \nu_m \nu_n}^{pp(J \pi)*} \chi_{\nu_m' \nu_n}^{\tau(J \pi)} - \sum_{\nu_j' \nu_i} \left\{ - \frac{\epsilon_{\nu_i} + \epsilon_{\nu_j}}{1 + \delta_{\nu_i \nu_j}} \delta_{\nu_i' \nu_i} \delta_{\nu_j' \nu_j} \right.$$

$$\left. + F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i' \nu_j'}^{pp(J \pi)} \right\} \gamma_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J \pi)} = \Omega_{\tau(J \pi)} \frac{\gamma_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J \pi)}}{1 + \delta_{\nu_i' \nu_j'}} \quad (2.16b)$$

Durch die Einführung der "renormierten Amplituden"

$$\tilde{\chi}_{\nu_m' \nu_n}^{\tau(J \pi)} := (1 + \delta_{\nu_m' \nu_n}) \chi_{\nu_m' \nu_n}^{\tau(J \pi)} \quad (2.17a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J \pi)} := (1 + \delta_{\nu_i' \nu_j'}) \gamma_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J \pi)} \quad (2.17b)$$

erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{\nu_m; \nu_n} \{ (\varepsilon_{\nu_m} + \varepsilon_{\nu_n}) \delta_{\nu_m \nu_m'} \delta_{\nu_n \nu_n'} + F_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{pp(J^\pi)} (1 + \delta_{\nu_m \nu_n}) \} \tilde{\chi}_{\nu_m \nu_n}^{\tau(J^\pi)} \quad (2.18a)$$

$$+ \sum_{\nu_j; \nu_i} F_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{pp(J^\pi)*} (1 + \delta_{\nu_i \nu_j}) \tilde{\gamma}_{\nu_i \nu_j}^{\tau(J^\pi)} = \Omega_{\tau(J^\pi)} \tilde{\chi}_{\nu_m' \nu_n'}^{\tau(J^\pi)}$$

$$- \sum_{\nu_m; \nu_n} F_{\nu_i' \nu_j' \nu_m \nu_n}^{pp(J^\pi)*} (1 + \delta_{\nu_m \nu_n}) \tilde{\chi}_{\nu_m \nu_n}^{\tau(J^\pi)} - \sum_{\nu_j; \nu_i} \{ -(\varepsilon_{\nu_i} + \varepsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_i \nu_i'} \delta_{\nu_j \nu_j'} \} \tilde{\gamma}_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J^\pi)} = \Omega_{\tau(J^\pi)} \tilde{\gamma}_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J^\pi)} \quad (2.18b)$$

$$+ F_{\nu_i \nu_j \nu_i' \nu_j'}^{pp(J^\pi)} (1 + \delta_{\nu_i \nu_j}) \tilde{\gamma}_{\nu_i \nu_j}^{\tau(J^\pi)} = \Omega_{\tau(J^\pi)} \tilde{\gamma}_{\nu_i' \nu_j'}^{\tau(J^\pi)}$$

Für gg-Kerne ist eine weitere Umformung aller Terme der Form

$$\sum_{\nu_3; \nu_4} F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{pp(J^\pi)(*)} (1 + \delta_{\nu_3 \nu_4}) \tilde{Z}_{\nu_3 \nu_4}^{\tau(J^\pi)}$$

vorteilhaft. Im folgenden bezeichnet ν_a (vorübergehend) alle Quantenzahlen eines Einteilchenzustands a außer m_a und t_a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\nu_3, \nu_4} F_{\nu_1 t \nu_2 t \nu_3 t \nu_4 t}^{pp(J^\pi)} (1 + \delta_{\nu_3 \nu_4}) \tilde{Z}_{\nu_3 t \nu_4 t}^{\tau(J^\pi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu_3 \nu_4} F_{\nu_1 t \nu_2 t \nu_3 t \nu_4 t}^{pp(J^\pi)} \tilde{Z}_{\nu_3 t \nu_4 t}^{\tau(J^\pi)} + \frac{1}{2} \sum_{\nu_3 \nu_4} F_{\nu_1 t \nu_2 t \nu_3 t \nu_4 t}^{pp(J^\pi)} \tilde{Z}_{\nu_3 t \nu_4 t}^{\tau(J^\pi)} \\ &+ \sum_{\nu_3} F_{\nu_1 t \nu_2 t \nu_3 t \nu_3 t}^{pp(J^\pi)} \tilde{Z}_{\nu_3 t \nu_3 t}^{\tau(J^\pi)} \\ &(t = -1/2 \text{ oder } t = 1/2) \end{aligned}$$

Führt man im ersten Summanden eine Indexumbenennung 3 \leftrightarrow 4 durch und bringt anschließend die Symmetrierelationen für drehimpulsgekoppelte Zustände bzw. die (renormierten) Amplituden

$$|\nu_4 t_4 \nu_3 t_3, JM\rangle = (-1)^{j_3 + j_4 - J + 1} |\nu_3 t_3 \nu_4 t_4, JM\rangle \quad (A2.16b')$$

$$\tilde{Z}_{\nu_4 t_4 \nu_3 t_3}^{\tau(J^\pi)} = (-1)^{j_3 + j_4 - J + 1} \tilde{Z}_{\nu_3 t_3 \nu_4 t_4}^{\tau(J^\pi)} \quad (2.5')$$

zur Anwendung, so resultiert

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu_3, \nu_4} F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\text{pp}}(J^\pi) t^{(1+\delta_{\nu_3 \nu_4})} \tilde{Z}_{\nu_3 \nu_4}^\tau(J^\pi) = \sum_{\nu_3 > \nu_4} F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\text{pp}}(J^\pi) \tilde{Z}_{\nu_3 \nu_4}^\tau(J^\pi) \quad (2.19)$$

Diese Relation macht klar, wieso im Kap. 1.3 für gg-Kerne auf eine Reduktion des Konfigurationsraumes verzichtet und stattdessen der antisymmetrisierte Ansatz mit dem Faktor 1/2 gewählt wurde.

Für uu-Kerne verschwinden alle Kroneckersymbole in den "renormierten Amplituden" (2.17) sowie in den RPA-Gleichungen (2.18). Mit der neuen Summationsvorschrift (ersetzt (1.23))

$$\sum_{\nu_r; \nu_s} : = \begin{cases} \sum_{\nu_r > \nu_s} & \text{für gg-Kerne} \\ (t_r = t_s \text{ fix } (1/2 \text{ oder } -1/2)) & \\ \sum_{\nu_r, \nu_s} & \text{für uu-Kerne} \\ (t_s = -t_r = 1/2) & \end{cases} \quad (2.20)$$

nehmen die RPA-Gleichungen (2.18) nun folgende Form an:

$$\sum_{\nu_m; \nu_n} \{ (\epsilon_{\nu_m} + \epsilon_{\nu_n}) \delta_{\nu_m \nu_m'} \delta_{\nu_n \nu_n'} + F_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{\text{pp}}(J^\pi) \} \tilde{\chi}_{\nu_m \nu_n}^\tau(J^\pi) \quad (2.21a)$$

$$+ \sum_{\nu_j; \nu_i} F_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{\text{pp}}(J^\pi) \tilde{\gamma}_{\nu_i \nu_j}^\tau(J^\pi) = \Omega_{\tau(J^\pi)} \tilde{\chi}_{\nu_m' \nu_n'}^\tau(J^\pi)$$

$$- \sum_{\nu_m; \nu_n} F_{\nu_i' \nu_j' \nu_m \nu_n}^{\text{pp}}(J^\pi) \tilde{\chi}_{\nu_m \nu_n}^\tau(J^\pi) - \sum_{\nu_j; \nu_i} \{ -(\epsilon_{\nu_i} + \epsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_i \nu_i'} \delta_{\nu_j \nu_j'} + F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{\text{pp}}(J^\pi) \} \tilde{\gamma}_{\nu_i \nu_j}^\tau(J^\pi) = \Omega_{\tau(J^\pi)} \tilde{\gamma}_{\nu_i' \nu_j'}^\tau(J^\pi) \quad (2.21b)$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} A(J^\pi) & B(J^\pi) \\ -B^+(J^\pi) & -C(J^\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^\tau(J^\pi) \\ \tilde{\gamma}^\tau(J^\pi) \end{pmatrix} = \Omega_{\tau(J^\pi)} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^\tau(J^\pi) \\ \tilde{\gamma}^\tau(J^\pi) \end{pmatrix} \quad (2.22a)$$

mit

$$\Omega_{\tau(J^\pi)} = E_{\tau(J^\pi)} - E_0 \quad (2.22b)$$

und

$$A_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{(J^\pi)} = (\varepsilon_{\nu_m} + \varepsilon_{\nu_n}) \delta_{\nu_m \nu_m'} \delta_{\nu_n \nu_n'} + F_{\nu_m' \nu_n' \nu_m \nu_n}^{pp}(J^\pi) \quad (2.22c)$$

$$B_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{(J^\pi)} = F_{\nu_m' \nu_n' \nu_i \nu_j}^{pp}(J^\pi) \quad (2.22d)$$

$$C_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{(J^\pi)} = -(\varepsilon_{\nu_i} + \varepsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_i \nu_i'} \delta_{\nu_j \nu_j'} + F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{pp}(J^\pi) \quad (2.22e)$$

Für reelle Potentialmatrizen gilt ferner - mit (1.32a), (1.32b) -

$$F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{pp}(J^\pi) = F_{\nu_i' \nu_j' \nu_i \nu_j}^{pp}(J^\pi) \quad (2.22f)$$

Die Prozedur zur Herleitung der RPA-Gleichungen für Zweilochkerne ist der für Zweiteilchenkerne völlig analog. Die Kopplung von Zweilochzuständen unterscheidet sich von der für Zweiteilchenzustände nicht einmal um eine Phase; die Einführung renormierter Amplituden - (2.17) - und die Reduktion des Konfigurationsraumes für gg-Kerne - (2.19) - ist in genau der gleichen Weise durchführbar. Die resultierenden Zweilochkern-RPA-Gleichungen lauten daher:

$$\begin{pmatrix} C^{(J^\pi)} & B^{(J^\pi)} \\ -B^{(J^\pi)} & -A^{(J^\pi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\lambda(J^\pi)*} \\ \tilde{\gamma}^{\lambda(J^\pi)*} \end{pmatrix} = \Omega_{\lambda(J^\pi)}^* \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\lambda(J^\pi)*} \\ \tilde{\gamma}^{\lambda(J^\pi)*} \end{pmatrix} \quad (2.23a)$$

$$\Omega_{\lambda(J^\pi)} = E_{\lambda(J^\pi)} - E_0 \quad (2.23b)$$

2.3 Die Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen für "Kernzustände J^π "

Es ist nun unschwer zu erkennen, daß die Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen für dreihimpulsgekoppelte Zustände definierter Parität mit der Notation

$$F_{\nu_\alpha \nu_\beta \nu_\gamma \nu_\delta}^{ph}(J^\pi) = \sum_{\substack{m_\alpha m_\beta \\ m_\gamma m_\delta}} (-)^{j_\beta - m_\beta + j_\delta - m_\delta} \langle j_\alpha m_\alpha j_\beta -m_\beta | JM \rangle \langle j_\gamma m_\gamma j_\delta -m_\delta | JM \rangle \nu_{\nu_\alpha m_\alpha \nu_\delta m_\delta \nu_\beta m_\beta \nu_\gamma m_\gamma} \quad (2.24)$$

folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_n, \nu_j} \{ [(\varepsilon_{\nu_n} - \varepsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_n \nu_n'} \delta_{\nu_j \nu_j'} + F_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{ph}(J^\pi)] \chi_{\nu_m \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} \\ + F_{\nu_m \nu_i \nu_j \nu_n}^{ph}(J^\pi) \gamma_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} \} = \Omega_{\kappa(J^\pi)} \chi_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\sum_{\nu_n, \nu_j} \{ F_{\nu_i \nu_m \nu_n \nu_j}^{\text{ph}(J^\pi)} X_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} + [(\epsilon_{\nu_n} - \epsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} + F_{\nu_i \nu_m \nu_j \nu_n}^{\text{ph}(J^\pi)}] X_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} \} = -\Omega_{\kappa(J^\pi)} Y_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \quad (2.25b)$$

Wegen der Symmetrierelation (A2.6b) für Clebsch-Gordan-Koeffizienten gilt mit (1.32a), (1.32b)

$$F_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\text{ph}(J^\pi)} = (-1)^{k_1 + k_2 + k_3 + k_4} F_{\nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3}^{\text{ph}(J^\pi)*} \quad (2.26)$$

mit

$$k_\alpha = j_\alpha + 1/2 \quad (2.27)$$

Die Gleichungen (2.25) lassen sich daher nicht ohne weiteres in einer den RPA-Gleichungen (1.53) bzw. (1.56) analogen Form schreiben; zu diesem Zweck muß vielmehr noch folgende Phasenkonvention eingeführt werden (u.a. als "Ringphase" bekannt):

$$\tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_3 \nu_4}^{\text{ph}(J^\pi)} = \begin{cases} (-1)^{k_m + k_3} F_{\nu_m \nu_i \nu_3 \nu_4}^{\text{ph}(J^\pi)} & , \text{ falls } \nu_3 \text{ Teilchen-, } \nu_4 \text{ Lochzustand} \\ (-1)^{k_m + k_4} F_{\nu_m \nu_i \nu_3 \nu_4}^{\text{ph}(J^\pi)} & , \text{ falls } \nu_3 \text{ Loch-, } \nu_4 \text{ Teilchenzustand} \end{cases} \quad (2.28a)$$

$$\tilde{X}_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} = (-1)^{k_m} X_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \quad (2.28b)$$

$$\tilde{Y}_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} = (-1)^{k_m} Y_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \quad (2.28c)$$

Mit dieser Phasenkonvention gilt statt (2.26)

$$\tilde{F}_{\nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3}^{\text{ph}(J^\pi)} = \tilde{F}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\text{ph}(J^\pi)*} \quad (2.29)$$

und da die k-Quantenzahlen (2.27) ganzzahlig sind, lassen sich die Teilchen-Loch-RPA-Gleichungen in folgender Form schreiben:

$$\sum_{\nu_n, \nu_j} \{ [(\epsilon_{\nu_n} - \epsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} + \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{\text{ph}(J^\pi)}] \tilde{X}_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} + \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_j \nu_n}^{\text{ph}(J^\pi)} \tilde{Y}_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} \} = \Omega_{\kappa(J^\pi)} \tilde{X}_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \quad (2.30a)$$

$$\sum_{\nu_n, \nu_j} \{ \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_j \nu_n}^{\text{ph}(J^\pi)} \tilde{\chi}_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} + [(\epsilon_{\nu_n} - \epsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j}] + \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{\text{ph}(J^\pi)} \tilde{\chi}_{\nu_n \nu_j}^{\kappa(J^\pi)} \} = -\Omega_{\kappa(J^\pi)} \tilde{\gamma}_{\nu_m \nu_i}^{\kappa(J^\pi)} \quad (2.30b)$$

Für den doppelt-magischen Kern lautet (2.30) in Matrixnotation explizite

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(J^\pi) & \tilde{B}(J^\pi) \\ -\tilde{B}(J^\pi)^* & -\tilde{A}(J^\pi)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\kappa(J^\pi)} \\ \tilde{\gamma}^{\kappa(J^\pi)} \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa(J^\pi)} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\kappa(J^\pi)} \\ \tilde{\gamma}^{\kappa(J^\pi)} \end{pmatrix} \quad (2.31a)$$

mit

$$\Omega_{\kappa(J^\pi)} = E_{\kappa(J^\pi)} - E_0 \quad (2.31b)$$

und

$$\tilde{A}_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{(J^\pi)} = (\epsilon_{\nu_n} - \epsilon_{\nu_j}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} + \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{\text{ph}(J^\pi)} \quad (2.32a)$$

$$\tilde{B}_{\nu_m \nu_i \nu_n \nu_j}^{(J^\pi)} = \tilde{F}_{\nu_m \nu_i \nu_j \nu_n}^{\text{ph}(J^\pi)} \quad (2.32b)$$

sowie der Summationsvorschrift (1.19b), der Definition (2.24) für die Restwechselwirkungsmatrixelemente (siehe auch (A1.4)) und der Ringphasenkonvention (2.28). $\tilde{A}^{(J^\pi)}$ ist hermitesch, $\tilde{B}^{(J^\pi)}$ symmetrisch.

Für die Teilchen-Loch-Isobare hingegen folgt aus (2.30):

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(J^\pi; t, -t) & \tilde{B}(J^\pi; t, -t) \\ -\tilde{B}(J^\pi; -t, t)^* & -\tilde{A}(J^\pi; -t, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\kappa(J^\pi; t, -t)} \\ \tilde{\gamma}^{\kappa(J^\pi; t, -t)} \end{pmatrix} = \Omega_{\kappa(J^\pi; t, -t)} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{\kappa(J^\pi; t, -t)} \\ \tilde{\gamma}^{\kappa(J^\pi; t, -t)} \end{pmatrix} \quad (2.33a)$$

mit

$$\Omega_{\kappa(J^\pi; t, -t)} = E_{\kappa(J^\pi; t, -t)} - E_0 \quad (2.33b)$$

und

$$\tilde{A}_{\nu_m t' \nu_n t'', \nu_n t' \nu_j t''}^{(J^\pi; t', t'')} = (\epsilon_{\nu_n t'} - \epsilon_{\nu_j t''}) \delta_{\nu_m \nu_n} \delta_{\nu_i \nu_j} + \tilde{F}_{\nu_m t' \nu_n t'' \nu_n t' \nu_i t''}^{\text{ph}(J^\pi)} \quad (2.34a)$$

$$\tilde{B}_{\nu_m t' \nu_i t'', \nu_n t'' \nu_j t'}^{(J^\pi; t', t'')} = \tilde{F}_{\nu_m t' \nu_i t'' \nu_j t' \nu_n t''}^{\text{ph}(J^\pi)} \quad (2.34b)$$

sowie der Summationsvorschrift (1.20b) etc. $A^{(J^\pi; t', t'')}$ ist hermitesch, und für $B^{(J^\pi; t', t'')}$ gilt offensichtlich

$$\tilde{B}^{(J^\pi; t', t'')} = \tilde{B}^{(J^\pi; t'', t')}^T \quad (2.35)$$

Gleichung (2.33) kann mit Ebert's Notation (1.59) natürlich auch in der (1.61) und (1.62) analogen Form geschrieben werden, wovon später noch Gebrauch gemacht wird. Im übrigen sollte klar sein, daß v_a in (2.34) alle Quantenzahlen des Einteilchenzustands a außer der magnetischen und der Isospinquantenzahl bezeichnet, in (2.32) hingegen alle außer der magnetischen und in (1.57) alle außer der Isospinquantenzahl.

3. Approximative Lösung des korrespondierenden Einteilchenproblems

Die RPA-Gleichungen setzen die Diagonalisierung des Einteilchen-Hamiltonoperators H_0 (1.15) bzw. die selbstkonsistente Lösung der Hartree-Fock-Gleichungen (1.11) zur Berechnung der (HF-)Einteilchenwellenfunktionen und -energien voraus. Wie allgemein üblich, wurde auf die aufwendige Durchführung der selbstkonsistenten HF-Prozedur verzichtet und stattdessen der Einteilchen-Hamiltonoperator eines problemangepaßten Schalenmodells diagonalisiert.

3.1 Die Einteilchenbasis (Kle70), (Con84)

Die Wahl fiel nicht zufällig auf das bewährte Modell von Blomqvist und Wahlborn (BW60), für welches ein von Dr. V. Klemt entwickeltes Computerprogramm zur Verfügung stand. Das Potential setzt sich additiv aus zwei bzw. drei Potentialtypen zusammen; einem spinunabhängigen Zentralpotential vom Woods-Saxon-Typ, einem ortsabhängigen Spin-Bahn-Potential sowie, nur für Protonen, einem abstoßenden elektrostatischen Coulombpotential, das von einer homogenen sphärischen Ladungsverteilung erzeugt wird:

$$V(r) = - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{\alpha}\right)} - \lambda \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(- \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{\alpha}\right)} \right) + v_{\text{Coul}}^{\text{sph}}(r) \quad (3.1a)$$

wobei

$$v_{\text{Coul}}^{\text{sph}}(r) = \begin{cases} (1/2-t) \frac{Ze^2}{2R} \left\{ 3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\}, & r < R \\ (1/2-t) \frac{Ze^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (3.1b)$$

t kennzeichnet die Isospinquantenzahl, m die Nukleonenmasse (Mittel aus Protonen- und Neutronenmasse - siehe Tabelle 1). Die Kernladung Z wird einheitlich zu $Z=82$ gewählt. V_0 bezeichnet die Potentialtiefen, welche für Protonen und Neutronen unterschiedlich gewählt werden (Symmetrieenergie!). R ist der Modell-Kernradius, α der die Abfallbreite des Woods-Saxon-Potentials bestimmende Parameter und λ der Stärkeparameter des Spin-Bahn-Potentials. Den Parametern R und α könnte man für die verschiedenen Potentialtypen sowie für Protonen bzw. Neutronen unterschiedliche Werte geben; letzteres gilt auch für λ . Blomqvist und Wahlborn machen von dieser Freiheit in ihrem ursprünglichen Modell keinen Gebrauch. In der vorliegenden Arbeit werden die von ihnen ermittelten Parameter (BW60) V_0^p , V_0^n , R , α und λ benutzt (siehe Tabelle 1).

Die zufällige Entartung der Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators nach der Quantenzahl ℓ des Bahndrehimpulses wird bereits durch das Woods-Saxon-Potential aufgehoben. Der Spin-Bahn-Term bewirkt darüber hinaus eine explizite Abhängigkeit von der Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses, wie die Relation

$$\vec{\ell} \cdot \vec{s} = 1/2 (j^2 - \ell^2 - s^2) \quad (3.2)$$

zeigt, mit der man die dem Potential (3.1) entsprechende Schrödingergleichung in die zugehörige radiale Schrödingergleichung transformiert. Die Abhängigkeit der Eigenfunktionen von den Winkel- bzw. Spinkoordinaten wird natürlich durch die Kugelflächenfunktionen bzw. die Paulispinoren beschrieben, welche allerdings zu Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulses gekoppelt werden müssen (siehe Anhang 2). Die Lösungen der radialen Schrödingergleichung $R_{n\ell j}(r)$ werden aus numerischen Gründen als (endliche) Summen von Oszillatorwellenfunktionen $x_{n\ell}(r)$ dargestellt (Kle70)

$$R_{n\ell j}(r) = \sum_{m=1}^M c_{n\ell j}^{(m)} x_{m\ell}(r) \quad (3.3a)$$

Nach Eder (Ed66, S.73) gilt

$$x_{m\ell}(r) = \frac{\sqrt{2(m-1)!}}{\sqrt{b^3 \Gamma(m+\ell+1/2)}} \left(\frac{r}{b}\right)^\ell L_{m-1}^{\ell+1/2} \left(\frac{r^2}{b^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (3.3b)$$

Hierbei durchlaufen die Radialquantenzahlen n bzw. m alle natürlichen Zahlen (außer Null); $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ist die Oszillatorkonstante und wird numerisch durch die Relation (BG77, eq.2.36)

$$b = 1.00 \text{ A}^{1/6} \text{ fm} \quad (3.4)$$

bestimmt, $L_{m-1}^{\ell+1/2}$ sind die verallgemeinerten Laguerre-polynome der Ordnung $(m-1)$ und Γ ist die Gammafunktion.

Bei der Diagonalisierung des Hamiltonoperators H_{BW} des Blomqvist-Wahlborn-Schalenmodells - zwecks Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $c_{n\ell j}^{(m)}$ - kann man den Raum der Oszillatorbasiswellenfunktionen jeweils auf Unterräume zu gegebenem ℓ und j einschränken, da H_{BW} mit $\vec{\ell}^2$ und j^2 vertauscht:

$$\sum_{m=1}^{M_\ell} \langle m' \ell j | H_{BW} | m \ell j \rangle c_{n \ell j}^{(m)} = \varepsilon_{n \ell j} c_{n \ell j}^{(m')} \quad (3.5)$$

Die Dimensionen M_ℓ der Unterräume müssen so gewählt werden, daß die Näherungslösungen (3.3) "exakte" Lösungen (z.B. (BW60)) hinreichend genau wiedergeben. Aufgrund des bekannten Zusammenhangs zwischen Oszillatorhauptquantenzahl $N (>0)$, Oszillatorradialquantenzahl $m (>1)$ und Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ

$$N = 2(m-1) + \ell \quad (3.6)$$

werden die M_ℓ im Fall eines von den Oszillatorbasiswellenfunktionen mit $N \leq N_{\max}$ aufgespannten Raums durch

$$\tilde{N} = 2M_\ell + \ell - 1 \quad (3.7a)$$

bestimmt, wobei

$$\tilde{N} = N_{\max} + 1 \quad (3.7b)$$

die Zahl der Oszillatorschalen ist. $\tilde{N} = 15$ Oszillatorschalen erweisen sich in der Bleiregion als ausreichend (Kle70).

3.2 Die Einteilchenenergien

Die Diagonalisierung (3.5) des Blomqvist-Wahlborn-Hamiltonoperators liefert auch eine Schalenmodellnäherung zu den in den RPA-Gleichungen auftretenden HF-Einteilchenenergien. Man kann jedoch zeigen, daß der (natürlich wünschenswerte) Übergang zu einer "renormierten RPA", die Grundzustandskorrelationen nicht erst a posteriori berücksichtigt, zweierlei Modifikationen der RPA-Gleichungen bedingt: Eine Renormierung der Wechselwirkungsstärke (was im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter von Bedeutung ist - s.u.) sowie die Ersetzung der HF-Einteilchenenergien durch die experimentellen Einteilchenenergien ((Ro70, Ch.14.9(ii)); detailliert (Ro68)).

"In most practical RPA calculations, where single-particle energies are taken directly from experiment and the interaction strength is adjusted to fit the

data, it appears that one is already largely following the prescription of the renormalized equations." (Ro70,p.278).

Die Prozedur zur "direkten Übernahme der Einteilchenenergien vom Experiment" wird zusammen mit anderen Energieskalierungsproblemen im Anhang 3 beschrieben. Für die hier behandelten Kernspektren erwies sich ein Konfigurationsraum, der für Protonen und/oder Neutronen die (energetisch) oberste besetzte und die unterste unbesetzte Oszillatorschale enthält, als völlig ausreichend (s.u.).

4. Verfahren zur Lösung von RPA-Gleichungssystemen mit reellen Potentialmatrizen

Die RPA-Matrizen (2.22), (2.23), (2.31) und (2.33) sind nichthermitesch. Gleichwohl sind die meisten ihrer Untermatrizen hermitesch, insbesondere die TDA-Matrizen. Im Fall reeller Potentialmatrizen sind letztere sogar reell symmetrisch und somit problemlos mit "Standardmethoden"* diagonalisierbar. Alle im Rahmen dieser Arbeit relevanten Potentialmatrizen sind reell (s.u.). Ist ferner die TDA-Matrix positiv definit, so kann man das nichthermitesche Eigenwertproblem (2.31) für den doppelt-magischen Kern durch Äquivalenztransformationen auf ein reell symmetrisches von halber Dimension zurückführen (Kap. 4.1).

Diese Methode dient als Prototyp für die Lösung der hier interessierenden RPA-Gleichungssysteme für nicht doppelt-magische Kerne. Die RPA-Gleichungssysteme (2.33) für die beiden Teilchen-Loch-Isobare doppelt-magischer Kerne können durch Äquivalenztransformationen in ein Gleichungssystem von der Struktur des RPA-Gleichungssystems (2.31) für doppelt-magische Kerne überführt werden (ERW78) und sind daher analog lösbar (Kap. 4.2). In gleicher Weise lassen sich die Zweiteilchen- bzw. Zweiloch-RPA-Gleichungen (2.22) bzw. (2.23) für "konjugierte" Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne (z.B. ^{206}Tl und ^{210}Bi) in ein Gleichungssystem von der Struktur des RPA-Gleichungssystems (2.31) transformieren (Kap. 4.3). In diesem Fall erweist sich allerdings eine vorübergehende Verlegung des Nullpunktes der Energieskala der Einteilchenenergien auf die Fermikante(n) als notwendig, da andernfalls die TDA-Matrix für Zweiteilchenkerne nicht positiv definit ist.

* Bekanntlich ist eine (nicht notwendig reelle) symmetrische Matrix über einem endlichdimensionalen, komplexen, normierten Vektorraum durch eine orthogonale Transformation diagonalisierbar und hat nur reelle Eigenwerte. Die Transformation ist explizite angebbbar ("Standardmethode"; siehe (BS80, §2.4.4.5)).

4.1 Die "prototypische" Lösungsmethode für das RPA-Gleichungssystem des doppelt-magischen Kerns (Kle82a)

Für das RPA-Gleichungssystem (2.31) des doppelt-magischen Kerns bietet sich in diesem Zusammenhang die schlichte Notation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

an, wobei die Matrizen A und B (2.32) für reelle Potentialmatrizen reell und symmetrisch sind. Die Gleichungen (4.1) lassen sich durch Addition

$$(A-B)x + (B-A)y = \omega(x+y)$$

bzw. durch Subtraktion

$$(A+B)x + (B+A)y = \omega(x-y)$$

umformen zu

$$(A-B)(x-y) = \omega(x+y) \quad (4.2a)$$

$$(A+B)(x+y) = \omega(x-y) \quad (4.2b)$$

Durch kreuzweises Anwenden der Operatoren (A-B), (A+B) ergibt sich

$$(A+B)(A-B)(x-y) = \omega(A+B)(x+y) = \omega^2(x-y)$$

$$(A-B)(A+B)(x+y) = \omega(A-B)(x-y) = \omega^2(x+y)$$

d.h.

$$[(A+B)(A-B) - \omega^2](x-y) = 0 \quad (4.3a)$$

$$[(A-B)(A+B) - \omega^2](x+y) = 0 \quad (4.3b)$$

Mit den folgenden Definitionen zur Notation

$$F := A-B \quad (4.4a)$$

$$G := A+B \quad (4.4b)$$

$$|p\rangle := |x\rangle + |y\rangle \quad (4.5a)$$

$$|q\rangle := |x\rangle - |y\rangle \quad (4.5b)$$

läßt sich (4.2) in der Form

$$F|q\rangle = \omega|p\rangle \quad (4.6a)$$

$$G|p\rangle = \omega|q\rangle \quad (4.6b)$$

und (4.3) in der Form

$$(GF - \omega^2)|q\rangle = 0 \quad (4.7a)$$

$$(FG - \omega^2)|p\rangle = 0 \quad (4.7b)$$

schreiben.

Mit A und B sind auch F und G reell symmetrisch. Für reell symmetrische Matrizen gilt nun folgendes: Ist C eine reell symmetrische Matrix, so gibt es eine (nicht unbedingt: genau eine) symmetrische Matrix $C^{1/2}$, für welche $(C^{1/2})^2 = C$ gilt. $C^{1/2}$ ist im gleichen Basissystem diagonal wie C, und in diesem gilt $(C^{1/2})_{ii} = \sqrt{C_{ii}}$ sowie $(C^{1/2})_{ii}^{-1} = 1/\sqrt{C_{ii}}$ (deshalb ist die Schreibweise $(C^{1/2})^{-1} = C^{-1/2}$ sinnvoll). Für positiv definites C ist $C^{1/2}$ natürlich eindeutig bestimmt; falls C nicht positiv definit ist, ist $C^{1/2}$ zwar symmetrisch, aber nicht reell symmetrisch.

Diese Sätze sind leicht zu beweisen ("leicht" bedeutet in diesem Zusammenhang: es kostete mich Minuten eher denn Stunden). Mit ihrer Hilfe läßt sich das Gleichungssystem (4.7) wie folgt umformen:

$$F^{1/2}(GF - \omega^2)|q\rangle = 0$$

$$F^{-1/2}(FG - \omega^2)|p\rangle = 0$$

d.h.

$$(F^{1/2} G F^{1/2} - \omega^2)F^{1/2}|q\rangle = 0 \quad (4.8a)$$

$$(F^{1/2} G F^{1/2} - \omega^2)F^{-1/2}|p\rangle = 0 \quad (4.8b)$$

Die Vektoren $F^{1/2}|q\rangle$ und $F^{-1/2}|p\rangle$ sind also Lösungen des gleichen Eigenwertproblems

$$F^{1/2} G F^{1/2}|r\rangle = \omega^2|r\rangle \quad (4.9)$$

auf welches die Lösung der RPA-Gleichungen (4.1) nun reduziert ist. Ebenso gut

kann man das Gleichungssystem (4.7) wie folgt umformen:

$$G^{-1/2}(GF-\omega^2)|q\rangle = 0$$

$$G^{1/2}(FG-\omega^2)|p\rangle = 0$$

d.h.

$$(G^{1/2} F G^{1/2} - \omega^2) G^{-1/2} |q\rangle = 0 \quad (4.10a)$$

$$(G^{1/2} F G^{1/2} - \omega^2) G^{1/2} |p\rangle = 0 \quad (4.10b)$$

und in diesem Fall sind $G^{-1/2}|q\rangle$ und $G^{1/2}|p\rangle$ Lösungen des gleichen Eigenwertproblems

$$G^{1/2} F G^{1/2} |s\rangle = \omega^2 |s\rangle \quad (4.11)$$

auf welches sich die RPA-Gleichungen (4.1) in diesem Fall reduzieren.

Da F und G reell symmetrisch und $F^{1/2}$ sowie $G^{1/2}$ symmetrisch sind, sind (4.9) und (4.11) symmetrische Eigenwertprobleme, auf welche sich die RPA-Gleichungen (4.1) im Fall reeller Potentialmatrizen also jedenfalls reduzieren lassen. Sind F und G darüber hinaus positiv definit, so sind die Eigenwertprobleme (4.9) und (4.11) sogar reell symmetrisch. Wie Ullah und Rowe (UR71) demonstrieren, ist die Stabilitätsbedingung (Kap. 1.6) für RPA-Matrizen der Bedingung, daß F und G positiv definit sind, äquivalent*. Aus numerischen Gründen haben die für doppelt-magische Kerne vorkommenden spuriosen Lösungen der RPA-Gleichungen allerdings häufig statt Null einen (absolut kleinen) komplexen Wert. Ullah und Rowe zeigen a.a.O. für diesen Fall folgendes: Hat die RPA-Matrix (4.1), welche die Stabilitätsbedingung erfüllt, (genau) einen komplexen Eigenwert, so ist dieser rein imaginär, sein Quadrat also negativ reell; in diesem Fall ist entweder F oder G positiv definit, und die jeweils andere Matrix hat einen einzigen negativen Eigenwert. Für attraktive Kräfte ist B "im wesentlichen" negativ definit, und daher wird in der Regel F die Matrix sein,

* Unter der Voraussetzung, daß die RPA-Annahme gerechtfertigt ist, also der Beitrag von B nur eine "kleine" Korrektur zu den TDA-Energien darstellt, ist die Stabilitätsbedingung dann und nur dann erfüllt, wenn die TDA-Matrix positiv definit ist; andernfalls ist mindestens eine der beiden Matrizen F , G nicht positiv definit, und gilt umgekehrt F und G positiv definit, so ist unter der RPA-Annahme die TDA-Matrix A jedenfalls positiv definit.

die positiv definit bleibt. Ullah und Rowe geben in dem genannten Artikel übrigens ein dem oben dargestellten eng verwandtes Lösungsverfahren an und gelangen zu einer Eigenwertgleichung, welche die gleichen Symmetrieeigenschaften aufweist wie die Eigenwertgleichungen (4.9) und (4.11) und ferner die gleiche Dimension hat wie diese, nämlich die halbe der ursprünglichen RPA-Gleichung (4.1).

Es verbleibt nun noch, explizit die Konstruktion der Lösungen der RPA-Gleichungen (4.1) aus den Lösungen von (4.9) bzw. (4.11) vorzuführen. Aus den Lösungen $|r\rangle$ von (4.9) gewinnt man

$$|p\rangle = \alpha F^{1/2} |r\rangle \quad (4.12a)$$

und daraus nach (4.6b)

$$|q\rangle = \frac{1}{\omega} G |p\rangle \quad (4.12b)$$

Mit $|p\rangle$ und $|q\rangle$ erhält man gemäß (4.5) $|x\rangle$ und $|y\rangle$:

$$|x\rangle = 1/2 \{ |p\rangle + |q\rangle \} \quad (4.13a)$$

$$|y\rangle = 1/2 \{ |p\rangle - |q\rangle \} \quad (4.13b)$$

Zu bestimmen ist in diesen Gleichungen nur noch der Normierungsfaktor α . Diesen bestimmt man durch die folgende Prozedur: Einerseits gilt die Normierung der RPA-Lösungsvektoren

$$\langle x | x \rangle - \langle y | y \rangle = 1 \quad (4.14)$$

und andererseits mit (4.13)

$$\begin{aligned} \langle x | x \rangle - \langle y | y \rangle &= 1/4 \{ \langle p | p \rangle + \langle q | q \rangle + \langle p | q \rangle + \langle q | p \rangle - \langle p | p \rangle - \langle q | q \rangle + \langle p | q \rangle + \langle q | p \rangle \} \\ \langle x | x \rangle - \langle y | y \rangle &= 1/2 \{ \langle p | q \rangle + \langle q | p \rangle \} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aus (4.6a) erhält man, da F symmetrisch

$$\omega \langle q | p \rangle = \langle q | F | q \rangle = \langle F q | q \rangle = \omega \langle p | q \rangle$$

d.h.

$$\langle q|p\rangle = \langle p|q\rangle \quad (4.16)$$

und (4.14)-(4.16) zusammenfassend, resultiert

$$\langle x|x\rangle - \langle y|y\rangle = \langle p|q\rangle = 1 \quad (4.17)$$

Setzt man nun (4.12) - zweimal - ein, so folgt

$$\begin{aligned} \langle p|q\rangle &= \alpha \langle F^{1/2} r | \frac{G}{\omega} p \rangle \\ \langle p|q\rangle &= \alpha \langle r F^{1/2} \frac{G}{\omega} \alpha F^{1/2} | r \rangle \\ \langle p|q\rangle &= \frac{\alpha^2}{\omega} \langle r F^{1/2} G F^{1/2} | r \rangle \end{aligned}$$

und mit (4.9) erhält man, (4.17) wieder aufnehmend

$$\langle p|q\rangle = \omega \alpha^2 = 1$$

d.h.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad (4.18)$$

Mit dem so zu guter letzt bestimmten Normierungsfaktor lautet (4.12)

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega}} F^{1/2} |r\rangle \quad (4.19a)$$

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega^3}} G F^{1/2} |r\rangle \quad (4.19b)$$

und die RPA-Lösungsvektoren (4.13)

$$|x\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \left(1 + \frac{G}{\omega} \right) F^{1/2} |r\rangle \quad (4.20a)$$

$$|y\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \left(1 - \frac{G}{\omega} \right) F^{1/2} |r\rangle \quad (4.20b)$$

Die RPA-Energien ω sind trivialerweise die Wurzeln aus den Eigenwerten ω^2 der Eigenwertprobleme (4.9) oder (4.11). Für letzteres ergibt sich aus den Lösungen $|s\rangle$

$$|q\rangle = \beta G^{1/2} |s\rangle \quad (4.21a)$$

und mit (4.6a)

$$|p\rangle = \frac{1}{\omega} F |q\rangle \quad (4.21b)$$

Mittels (4.17) und (4.11) folgt analog

$$\langle q|p\rangle = \omega \beta^2 = 1$$

d.h.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad (4.22)$$

und in (4.21) eingesetzt kommt man zu den Relationen

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega}} G^{1/2} |s\rangle \quad (4.23a)$$

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega^3}} F G^{1/2} |s\rangle \quad (4.23b)$$

Für die RPA-Lösungsvektoren (4.13) folgt in diesem Fall

$$|x\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \left(\frac{F}{\omega} + 1 \right) G^{1/2} |s\rangle \quad (4.24a)$$

$$|y\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \left(\frac{F}{\omega} - 1 \right) G^{1/2} |s\rangle \quad (4.24b)$$

womit die RPA-Gleichung (4.1) unter den genannten Voraussetzungen (reelle RPA-Matrix, positiv definite TDA-Matrix) als vollständig gelöst angesehen werden darf.

4.2 Die Lösungsprozedur für das kombinierte RPA-Gleichungssystem der beiden Teilchen-Loch-Isobare

Die RPA-Gleichungen (2.33) für die beiden Teilchen-Loch-Isobare doppelt-magischer Kerne lassen sich im Fall reeller Potentialmatrizen, d.h. reeller Untermatrizen (2.34), in Ebert's Notation (1.59) analog (1.60)-(1.61) darstellen

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4.25a)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_1 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (4.25b)$$

A_1 und A_2 sind reell symmetrisch, B_1 und B_2 jedoch nicht; vielmehr gilt nach (2.35)

$$B_2 = B_1^T \quad (4.26)$$

Nach Ebert et al. (ERW78) kombiniert man beide Gleichungssysteme in ein einziges

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ -B_2 & -A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & B_2 \\ 0 & 0 & -B_1 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

und führt folgende Äquivalenzumformungen durch:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1 \\ -B_2 & 0 & 0 & -A_2 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & -B_1 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & -B_1 & -A_1 & 0 \\ -B_2 & 0 & 0 & -A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Diese Eigenwertgleichung hat die gleiche Struktur wie die RPA-Gleichung (4.1), da die Matrizen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (4.29a)$$

und

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29b)$$

reell symmetrisch sind; das im letzten Abschnitt vorgestellte Lösungsverfahren ist somit auf (4.28) anwendbar, sofern nur die TDA-Matrizen A_1 und A_2 positiv definit sind.

Das Gleichungssystem (4.28) legt möglicherweise das Mißverständnis nahe, die beiden Gleichungssysteme (4.25) seien nicht nur formal, sondern "physikalisch" gekoppelt. Das ist natürlich nicht der Fall; bei den Eigenfrequenzen des Systems "1" liefert (4.28) für "2" die triviale Lösung $x_2=0$, $y_2=0$, und vice versa.

4.3 Die Lösungsprozedur für das kombinierte RPA-Gleichungssystem konjugierter Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne

Als der einem gegebenen Zweiteilchenkern "konjugierte" Zweilochkern wird hier derjenige Zweilochkern verstanden, dessen unbesetzte Lochniveaus gleiche Isospinquantenzahl(en) haben wie die besetzten Teilchenniveaus des Zweiteilchenkerns. Konkret sind konjugierte Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne etwa: ^{210}Pb und ^{206}Pb , ^{210}Bi und ^{206}Tl , ^{210}Po und ^{206}Hg .

In diesem Abschnitt wird für die Zweiteilchen- bzw. Zweilochkern-RPA-Gleichungen (2.22) bzw. (2.23) konjugierter Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne folgende simple Notation verwandt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix} = \omega_\tau \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix} \quad (4.30a)$$

$$\begin{pmatrix} C & B^T \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} = \omega_\lambda \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} \quad (4.30b)$$

Im Fall reeller Potentialmatrizen sind A, B und C (sowie insbesondere x_λ und y_λ) reell und die TDA-Matrizen A und C reell symmetrisch. Analog dem Vorgehen im vorigen Abschnitt werden beide Gleichungssysteme (4.30) in eines zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ -B^T & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B^T \\ 0 & 0 & -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

und die gleichen Äquivalenztransformationen durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ -B^T & 0 & 0 & -C \\ 0 & C & B^T & 0 \\ 0 & -B & -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \\ y_\tau \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & C & B^T & 0 \\ 0 & -B & -A & 0 \\ -B^T & 0 & 0 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \\ y_\tau \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x_\tau \\ x_\lambda \\ y_\lambda \\ y_\tau \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Diese Eigenwertgleichung hat wie (4.28) die gleiche Struktur wie die RPA-Gleichung (4.1), im Gegensatz zu (4.28) aber den Schönheitsfehler, daß die Zweiteilchen-TDA-Matrix A, anders als die Zweiloch-TDA-Matrix C, nicht positiv definit ist, wie eine Inspektion von (2.22c,e) sofort zeigt: A enthält additiv die Summe von zwei Einteilchenenergien, welche für gebundene Einteilchenniveaux negative Werte haben (siehe auch Anhang 3), während C die Summe zweier - jedenfalls negativer - Einlochenergien subtraktiv beinhaltet. Diese Schwierigkeit kann man aber folgendermaßen umgehen (Kle83a): Die Fermienergie $\epsilon_{F,t'}$ für Einteilchenniveaux mit Isospinquantenzahl t' wird durch einen beliebigen Energiewert zwischen dem energetisch höchstliegenden Lochniveau und dem energetisch tiefstliegenden Teilchenniveau definiert (in der Regel nehmen wir das arithmetische Mittel der Energien dieser beiden Niveaux), und eine Energie $\eta_{v_r t'}$ ($t_r=t'$ natürlich) durch die Relation

$$\epsilon_{v_r t'} := \eta_{v_r t'} + \epsilon_{F,t'} \quad (4.33)$$

eingeführt. $\eta_{v_r t'}$ ist für Teilchenniveaux positiv definit, für Lochniveaux hingegen negativ definit. Es ist nun ein leichtes, mit der Definition (4.33) die RPA-Gleichungen (2.22) und (2.23) in der Notation von (4.30) in folgende Form zu bringen:

$$\begin{pmatrix} A' & B \\ -B^T & -C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix} = \omega_\tau' \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix} \quad (4.34a)$$

$$\begin{pmatrix} C' & B^T \\ -B & -A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} = \omega_\lambda' \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} \quad (4.34b)$$

mit

$$\omega_\tau' = \omega_\tau - (\epsilon_{F,t'} + \epsilon_{F,t''}) \quad (4.34c)$$

$$\omega_\lambda' = \omega_\lambda + (\epsilon_{F,t'} + \epsilon_{F,t''}) \quad (4.34d)$$

sowie

$$A'_{\nu_m t' \nu_n t''}^{(J^\pi)} = (\eta_{\nu_m t'} + \eta_{\nu_n t''}) \delta_{\nu_m \nu_m'} \delta_{\nu_n \nu_n'} + F_{\nu_m t' \nu_n t''}^{pp(J^\pi)} \quad (4.34e)$$

$$C'_{\nu_i t' \nu_j t''}^{(J^\pi)} = -(\eta_{\nu_i t'} + \eta_{\nu_j t''}) \delta_{\nu_i \nu_i'} \delta_{\nu_j \nu_j'} + F_{\nu_i t' \nu_j t''}^{pp(J^\pi)} \quad (4.34f)$$

Das Gleichungssystem (4.34) kann man natürlich ebenfalls in die Form von (4.32) transformieren, und die TDA-Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \quad (4.35a)$$

ist nun nicht nur reell symmetrisch, sondern auch positiv definit;

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35b)$$

ist selbstverständlich ebenfalls reell symmetrisch.

Die Transformation der Energien (4.34c,d) muß zur Berechnung der Anregungsenergien der Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne natürlich nach der Durchführung der Diagonalisierung wieder rückgängig gemacht werden.

Die Transformation (4.34c,d) hat übrigens den Nachteil, daß gelegentlich fast entartete Werte von ω_τ' und ω_λ' auftreten, was für ω_τ und ω_λ natürlich nie der Fall ist. Dies hat numerisch die unangenehme Konsequenz, daß die beiden Gleichungssysteme (4.34a,b) im (4.32) entsprechenden System nicht mehr völlig entkoppelt sind, d.h. für die entsprechende Eigenfrequenz ω_τ' sind die Amplituden x_λ und y_λ nicht mehr exakt null, wie man auch analytisch für ein entsprechendes zweidimensionales Gleichungssystem zeigen kann (Kle84a). Unangenehm ist dies, weil das Auftreten der trivialen Lösungen $x_\kappa=0$, $y_\kappa=0$ ($\kappa=\lambda$ bzw. τ) das natürliche Kriterium zur Zuordnung der (nichttrivialen) Lösungen zum entsprechenden Kern darstellt, welches aber bei "genügend starker" Entartung - etwa auf fünf Dezimalstellen - nicht mehr anwendbar ist. Man kann sich allerdings leicht behelfen, indem man die Fermienergien geringfügig anders definiert (s.o.). Im übrigen trat der diskutierte (Un-)Fall bei vielen hundert Programmläufen nur zweimal auf.

II. Effektive Nukleon-Nukleon-Restwechselwirkungen und ihre Matrixdarstellungen

5. Effektive NN-Restwechselwirkungen

"The nucleon-nucleon interaction is the most fundamental problem in nuclear physics. The great pioneer of the field, G. Breit, once called it the "Mount Everest" of nuclear physics." (Erk74,p.194)

5.0 Effektive NN-Wechselwirkungen für Kernstrukturuntersuchungen

Das angeführte Zitat beschreibt auch die momentane Situation zutreffend. Tatsächlich genügt aber die Kenntnis der fundamentalen NN-Wechselwirkung, die die Restwechselwirkung (1.18) definiert, aber noch nicht; die drastische Approximation der Kernstruktur angeregter Zustände (Kap. 1.3) erzwingt vielmehr noch die Ersetzung der Restwechselwirkung (1.18) durch eine effektive Restwechselwirkung (Kap. 5.1).

Angesichts dieser komplexen Situation bietet sich natürlich eine phänomenologische Parametrisierung an. Man kann etwa aus den experimentell gewonnenen Daten zur NN-Streuung solche Parametrisierungen der NN-Wechselwirkung gewinnen, und von dieser Möglichkeit wurde in starkem Maße Gebrauch gemacht. Allerdings gilt es zu bedenken, daß

"the most appropriate approach for deriving a realistic two-nucleon force ... surely depends on what one wishes to do afterwards with this potential ... if the final aim is to understand nuclear structure phenomena, we strongly believe that modifications of the NN-interaction due to the medium have to be taken into account." (Hol81,p.125)

Die in der Einleitung schon zitierten Arbeiten von Kuo und Brown (KB66) sowie von Kuo und Herling (KH71,72) benutzen das aus NN-Streudaten bestimmte Hamada-Johnston-Potential zur Berechnung der effektiven Wechselwirkung. Zu den von Erkelenz (Erk74,p.195) angeführten Nachteilen gehört nun insbesondere

"that any purely phenomenological potential will fail in dense matter, since the modifications due to the medium cannot be built in ⁱⁿ a well-defined way. " (Ho181,p.124)

Im engeren Sinne ist zum Hamada-Johnston-Potential zu sagen, daß es nach neueren Erkenntnissen ((HP75),(AB77),(Ho181)) eine zu starke Tensorpotentialkomponente enthält; Tabelle 4 im Artikel von Anastasio und Brown (AB77) zum Thema "Meson Exchange and the Theory of Finite Fermi Systems" gibt als ρ -Kopplungskonstante dieses Potentials $f_p^2 = 2.87$ an; die Diskussion in Kap. 5.2.3 zeigt, daß dieser Wert viel zu klein ist. Die Arbeiten von Kuo und Herling sind insofern überholt, als "guideline" aber unersetzlich.

Die anderen von Ma und True in ihrem Übersichtsartikel (MT73) behandelten theoretischen Arbeiten verwenden

"another older approach which, although non-rigorous and perhaps naive, has yielded a great deal of useful spectroscopic information. In this older approach it is assumed that the properties of the low-lying energy levels of nuclei depend primarily on those features of the two-body potential which determine the low-energy nucleon-nucleon scattering. The repulsive core and $\vec{L} \cdot \vec{S}$ terms, for example, are neglected in this approach, since they show up at higher energies in scattering experiments. Pseudo-potentials of some simple shape such as Yukawa or Gaussian are assumed. The parameters of these potentials are then adjusted, at least in theory, to give a good account of low-energy scattering. In practice, however, most calculations have begun in this spirit, but as often as not potential parameters were adjusted to improve the agreement between experiment and theory ... If the parameters do not stray too far from those determined by low-energy scattering and if the variations are systematic, say from one mass region to the next, then one could consider the two-body potentials to be meaningful as effective interactions of nucleons in nuclei. If, on the other hand, the parameter variation appears random, then the method is perhaps nothing more than an arbitrary parametrization of each nucleus in terms of the parameters of the potential." (HSP66, p.130)

Hughes et al. kommen übrigens zu folgendem Schluß:

"The aim of the present study was to ascertain whether or not an effective potential of the usual type used in shell model studies could be derived which would fit a large number of nuclei. No such potential was discovered." (HSP66,p.148)

Mit den Potentialen des üblichen Typs sind in diesem Zusammenhang Zentral- und Tensorpotentiale gemeint.

Ma und True (MT73) erweitern diesen Ansatz, indem sie die üblicherweise vernachlässigten komplizierteren Konfigurationen (siehe Kap. 5.1) effektiv durch Multipolkräfte zu beschreiben suchen. Das gelingt recht gut, doch drängt sich bei näherer Betrachtung der Verdacht auf, daß diese Methode tatsächlich doch nur "an arbitrary parametrization of each nucleus in terms of the parameters of the potential" darstellt.

Der Erfolg der - dichteabhängigen(!) - Skyrme-Parametrisierung der effektiven NN-Wechselwirkung nach Vautherin und Brink (VB72) für HF-Rechnungen stimuliert eine systematische Studie von Isakov et al. (IAS82) zum Thema "Effektive interaction of valence nucleons in nuclei", welche eine Beziehung zwischen (heute) üblichen Schalenmodellpotentialen und einem verallgemeinerten Skyrme-potential (z.B. einen Skyrmetensor enthaltend) herstellen. Dies erscheint sinnvoll, da die effektiven Potentiale eine zwar endliche aber kleine Reichweite haben. Die Autoren sind somit in der Lage, die äußerlich sehr verschiedenen Potentiale direkt zu vergleichen. Es stellt sich heraus, daß diese in wesentlichen Zügen ähnliche "Skymepotentiale" liefern. Ferner wird die Notwendigkeit eines dichteabhängigen Ansatzes sowie der expliziten Berücksichtigung der "Core-Phonon-Kopplung" (die schon erwähnten "komplizierteren Konfigurationen") hervorgehoben. Die Chancen, in diesem Rahmen eine befriedigende phänomenologische NN-Wechselwirkung erhalten zu können, werden entschieden optimistisch beurteilt.

Auch die Landau-Migdalsche Theorie endlicher Fermisysteme (Mig67), die (zumindest in der Bleiregion) mit großem Erfolg angewandt wurde, (etwa (BBG67), (Kle70); einen Überblick und gleichzeitig eine Erweiterung geben Speth et al. (SWW77)), verwendet einen dichteabhängigen Ansatz für die effektive NN-Wech-

selwirkung, ursprünglich (im wesentlichen) ein dichteabhängiges Deltapotential. Inzwischen wurde dieser Ansatz durch die Einführung von $(\pi+p)$ -Austauschwechselwirkungen erweitert (AB77), (B²OW77), (SKW80).

Zur Berechnung der Spektren der hier interessierenden Kerne erwies sich dieser Ansatz als wenig befriedigend (s. Teil III). Inzwischen liegen aber Berechnungen einer effektiven NN-Wechselwirkung auf der Basis der Bonner Ein-Boson-Austauschpotentiale (OBE-Potentiale) vor. Letztere berücksichtigen die Abhängigkeit der NN-Wechselwirkung vom nuklearen Medium (näherungsweise: von dessen Dichte). Diese Berechnungen wurden von K. Nakayama im Rahmen seiner Doktorarbeit (NKS83), (Nak84) durchgeführt und liefern (u.a.) G-Matrizen, die "for further convenience" nach einfachen Potentialtypen parametrisiert sind und daher von mir verwendet werden konnten. Somit konnte ein erster Schritt in Richtung einer Aktualisierung der Arbeiten von Kuo und Herling (KH71,72) getan werden.

5.1 Effektive Restwechselwirkung für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne

Die Einschränkung des Raums der Einteilchenzustände auf wenige Oszillatorschalen und die spezielle Wahl der Anregungsoperatoren beschränkt die möglichen Lösungen der den Bewegungsgleichungen (1.9) äquivalenten Schrödingergleichung (1.1) von vornherein auf einen Teil des A-Nukleonen-Hilbertraums. Dies hat zur Folge, daß die Restwechselwirkung V_{res} (1.18) durch eine sogenannte "effektive" Restwechselwirkung \mathcal{V}_{res} ersetzt werden muß. Physikalisch ist das unschwer zu motivieren: die Beschränkung des Konfigurationsraums auf energetisch tief-
liegende Zweiteilchenzustände (für Zweiteilchenkerne, o.B.d.A.) schließt die bei der Wechselwirkung zweier Nukleonen wegen des stark repulsiven Charakters der NN-Wechselwirkung auftretenden intermediären Streuzustände in energetisch hochliegende Zweiteilchenzustände künstlich aus. Intuitiv liegt daher die Erwartung nahe, daß die Restwechselwirkung V_{res} (1.18) durch die entsprechende Brücknersche G-Matrix zu ersetzen ist, welche den Effekt dieser intermediären Zustände bereits enthält. Allerdings ist der Kernrumpf (Core) keineswegs völlig inert, so daß der vollständige A-Nukleonen-Hilbertraum auch 3-Teilchen=1-Loch ($3p1h$)-Zustände, $4p2h$ -Zustände etc. umfaßt. Mathematisch argumentiert man folgendermaßen (Bra66): Ist

$$H = H_0 + V_{\text{res}} \tag{5.1}$$

der nukleare Hamiltonoperator, ψ ein (gebundener) Eigenzustand zum Energieeigenwert E

$$H\psi = E\psi \quad (5.2)$$

und bilden die Zustände $\{\phi_i\}$ eine Basis des A-Nukleonen-Hilbertraums, den man in den sogenannten Modellraum M (den Konfigurationsraum) und sein Komplement \bar{M} unterteilt:

$$\psi = \sum_i a_i \phi_i = \sum_{i \in M} a_i \phi_i + \sum_{i \in \bar{M}} a_i \phi_i \quad (5.3)$$

Sei ferner ψ_0 die Projektion von ψ auf M

$$\psi_0 = \sum_{i \in M} a_i \phi_i \quad (5.4)$$

so ist die Schrödingergleichung (5.2) äquivalent

$$(H_0 + \mathcal{V}_{\text{res}}) \psi_0 = E \psi_0 \quad (5.5a)$$

wobei die effektive Wechselwirkung \mathcal{V}_{res} der Operatorgleichung

$$\mathcal{V}_{\text{res}} = V_{\text{res}} + V_{\text{res}} \frac{\bar{Q}}{E - H_0} \mathcal{V}_{\text{res}} \quad (5.5b)$$

genügt, und \bar{Q} der Projektor auf \bar{M} ist:

$$\bar{Q} \psi = \sum_{i \in \bar{M}} a_i \phi_i \quad (5.5c)$$

Für gebundene Zustände gilt nun die Bethe-Goldstone-Gleichung in Operatorform (RS80, eq.(4.40))

$$G = V_{\text{res}} + V_{\text{res}} \frac{Q_F}{E - H_0} G \quad (5.6a)$$

wobei Q_F auf alle im HF-Grundzustand unbesetzten Zweiteilchenzustände $|mn\rangle$ oberhalb der Fermikante projiziert

$$Q_F = \sum_{m;n} |mn\rangle \langle mn| \quad (5.6b)$$

In Matrixform gilt also

$$\langle r's'|G|rs\rangle = \langle r's'|V_{\text{res}}|rs\rangle + \sum'_{m;n} \frac{\langle r's'|V_{\text{res}}|mn\rangle \langle mn|G|rs\rangle}{E - \epsilon_m - \epsilon_n} \quad (5.6c)$$

Den Projektionsoperator \bar{Q} kann man nun natürlicherweise so entwickeln:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{2p} + \bar{Q}_{3p1h} + \bar{Q}_{4p2h} + \dots \quad (5.7)$$

wobei \bar{Q}_{2p} auf alle Zweiteilchenzustände außerhalb des Modellsraums M projiziert, \bar{Q}_{3p1h} auf den Unterraum der $3p1h$ -Zustände, etc. Beschränkt man wie im Rahmen dieser Arbeit den Einteilchenkonfigurationsraum auf je eine Oszillator-schale unter- und oberhalb der Fermikante, so ist der Überlapp des Modellraums M , d.h. des Konfigurationsraums, mit dem Raum aller Zweiteilchenzustände oberhalb der Fermikante im vorliegenden Kontext zu vernachlässigen, da die in der G -Matrix enthaltenen intermediären Zustände zumeist hochenergetische sind (KB66,p.71), und somit gilt

$$\bar{Q}_{2p} \approx Q_F \quad (5.8)$$

und in einer ersten Näherung daher

$$V_{\text{res}} \approx G \quad (5.9)$$

Für Zweilochkerne läßt sich die Argumentation in gleicher Weise durchführen, wenn man folgendes bedenkt: Für einen korrelierten Grundzustand $|\phi\rangle$ gilt (Ableitung wie in Kap. 1.4)

$$\begin{aligned} \langle r'^{-1}s'^{-1}|V_{\text{res}}|r^{-1}s^{-1}\rangle &= \langle \phi | a_s^+ a_r^+ V_{\text{res}} a_r a_s | \phi \rangle \\ \langle r'^{-1}s'^{-1}|V_{\text{res}}|r^{-1}s^{-1}\rangle &= V_{r's',rs} = \langle r's'|V_{\text{res}}|rs\rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

und somit gilt die Bethe-Goldstone-Gleichung (5.6) auch in der Form

$$G = V_{\text{res}} + V_{\text{res}} \frac{Q_F'}{E - H_0} G \quad (5.11a)$$

mit

$$Q_F' = \sum'_{k;\ell} |k\ell\rangle \langle k\ell| \quad (5.11b)$$

(k, l Lochzustände). Die Entwicklung des Projektors \bar{Q} hat für Zweilochkerne die Form

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{2h} + \bar{Q}_{3h1p} + \bar{Q}_{4h2p} + \dots \quad (5.12)$$

und wie oben gilt

$$\bar{Q}_{2h} \approx Q_F' \quad (5.13)$$

und somit in einer ersten Näherung wiederum (5.9).

Zweifellos ist die G-Matrix ~~der~~ bei weitem dominierende Term in den Reihenentwicklungen (5.7) bzw. (5.12) entsprechenden Reihenentwicklungen von \bar{Q}_{res} . Ein explizites Modell für den 3p1h-Term findet sich im Artikel von Kuo und Brown (KB66), für den 4p2h-Term in der Arbeit von Kuo und Herling (KH72). Diese Terme sind gegenüber dem Term niedrigster Ordnung, der G-Matrix, aber keineswegs völlig vernachlässigbar, und die Art der Konvergenz dieser Reihenentwicklung ist, wie schon angedeutet, noch ungeklärt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeiten werden G-Matrizen als Approximation zur effektiven Wechselwirkung verwendet; direkte Vergleiche mit den experimentell beobachteten Spektren sind daher nur cum grano salis möglich, wohl aber qualitative Schlußfolgerungen.

5.2 Die $(\pi+p)$ -Austauschwechselwirkung

5.2.1 Ein-Pion-Austauschpotential (OPEP): Variablenseparation mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("I")

Das Verfahren von Horie und Sasaki (HS61) erlaubt es, Zweinukleonenpotentiale, die als Funktion der Relativkoordinaten gegeben sind, als Reihenentwicklung nach Produkten von Funktionen der Koordinaten der einzelnen Nukleonen zu formulieren. Dies ist bei der Berechnung von Matrixdarstellungen dieser Potentiale von großem Vorteil.

Bei der Formulierung dieses Abschnitts konnte ich mich im wesentlichen auf Manuskripte von V. Klemt (Kle82b) und S. Krewald (Kre84) stützen.

Das Ein-Pion-Austauschpotential ist nach dem Lehrbuch von Björken und Drell (BD66,eq.(10.51)) in der Ortsraumdarstellung gegeben durch

$$V_{\pi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \frac{e^{-\mu_{\pi} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.14)$$

gegeben, wobei f_{π}^2 die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante und

$$\mu_{\pi} = \frac{m_{\pi} c}{\hbar} \quad (5.15)$$

die inverse Comptonwellenlänge des Pions ist (numerische Werte: Tabelle 5); $\vec{\sigma}_r$ sind die Pauli-Spinmatrizen, $\vec{\tau}_r$ die entsprechenden Isospinmatrizen.

Durch eine Fouriertransformation

$$V_{\pi}(\vec{q}) = \int d^3 r_{21} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} V_{\pi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (5.16a)$$

mit

$$\vec{r}_{21} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (5.16b)$$

geht man zur Impulsdarstellung über. Da bekanntlich Impulsoperatoren $\vec{p} = -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ hermitesch sind, ist $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2$ hermitesch, und somit gilt

$$\begin{aligned} V_{\pi}(\vec{q}) &= \int d^3 r_{12} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{r}_{21}} \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \frac{e^{-\mu_{\pi} r_{21}}}{r_{21}} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\ V_{\pi}(\vec{q}) &= \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \int d^3 r_{12} \{ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \} \frac{e^{-\mu_{\pi} r_{21}}}{r_{21}} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\ V_{\pi}(\vec{q}) &= -\frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} \int d^3 r_{21} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{r}_{21}} \frac{e^{-\mu_{\pi} r_{21}}}{r_{21}} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \end{aligned}$$

Benutzt man Kugelkoordinaten zur Integration

$$\int d^3 r_{21} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{r}_{21}} \frac{e^{-\mu_{\pi} r_{21}}}{r_{21}} = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-iqr\cos\vartheta} \frac{e^{-\mu_{\pi} r}}{r}$$

so folgt ohne weiteres

$$\int d^3 r_{21} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{r}_{21}} \frac{e^{-\mu_{\pi} r_{21}}}{r_{21}} = \frac{4\pi}{q^2 + \mu_{\pi}^2}$$

und somit gilt für die Impulsdarstellung des OPEP (5.14)

$$V_{\pi}(\vec{q}) = -4\pi \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{q^2 + \mu_{\pi}^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.17)$$

Da bei der Ableitung von (5.14) die endliche Ausdehnung der Nukleonen nicht in Betracht gezogen wurde, enthält (5.17) - wie die entsprechenden Ausdrücke für andere Mesonaustauschpotentiale - eine unphysikalische Divergenz für große Impulsüberträge q (Erk74). Man führt daher an dieser Stelle regularisierende Formfaktoren ein, welche

"somehow take into account the extended structure of the nucleon. However, in the absence of a full-fledged relativistic theory ... the strong interaction form factors actually used are more or less arbitrary" (Erk74, p.209).

Erkelenz (Erk74) und Holinde (Hol81) diskutieren den üblichen Ansatz

$$\Gamma_{\pi}(q) = \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + q^2} \right)^n$$

detailliert; nach dem Vorschlag von Weise (Wei77) wird $n=2$ gewählt - das erlaubt es, die Fourier-Rücktransformation in den Ortsraum analytisch vorzunehmen - und $\Lambda_{\pi} = 6 \text{ fm}^{-1}$ (s.a. (BSW81)). Im folgenden gehen wir also von

$$V_{\pi}(\vec{q}) = -4\pi \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{q^2 + \mu_{\pi}^2} \Gamma_{\pi}(q) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.18a)$$

mit

$$\Gamma_{\pi}(q) = \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + q^2} \right)^2 \quad (5.18b)$$

aus. Die Form des Tensoroperators

$$S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \hat{\vec{q}}) = 3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{\vec{q}} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{\vec{q}} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (5.19a)$$

mit

$$\hat{\vec{q}} = \vec{q}/q \quad (5.19b)$$

legt nun folgende Umformung nahe:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}}{q^2 + \mu_\pi^2} &= \frac{1}{3} \frac{(3\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)q^2 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{q}) \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \frac{q^2 + \mu_\pi^2 - \mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \right\} \end{aligned}$$

und man erhält eine Zerlegung des OPEP in drei Summanden:

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{q}) &= \frac{4\pi}{3} \frac{f_\pi^2}{\mu_\pi^2} \left\{ - \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{q}) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 - \Gamma_\pi(q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Der erste Summand ist der Tensorpotentialanteil des OPEP, der zweite der Zentralpotentialanteil; der dritte ist, falls kein Formfaktor eingeführt wird, ein attraktives Deltapotential, hier jedoch ein kurzreichweitiges attraktives Zentralpotential, welches aber durch die stark repulsive Komponente des NN-Potentials (ω -Austausch) völlig überdeckt wird (siehe Abschnitt 5.2.2, Übergang zur G-Matrix).

Die vollständige Variablenseparation gelingt durch Fourier-Rücktransformation in den Ortsraum. Dazu empfiehlt es sich allerdings, zuvor die Spin- und Impulsvariablen im Tensoroperator zu separieren (HS61)*:

$$S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{q}) = \sqrt{\frac{24\pi}{5}} [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]^{(2)} \cdot \gamma^{(2)}(\Omega_q) \quad (5.21)$$

$(\Omega_q \equiv \vec{q})$

Zur Verkürzung der Prozedur bringe ich Tensor- und Zentralanteil auf eine gemeinsame Form. Mit der Definition des Tensorprodukts (Me61,eq.(C.86))

$$[S^{(k_1)} \times T^{(k_2)}]_m^{(\kappa)} = \sum_{m_1 m_2} \langle k_1 m_1 k_2 m_2 | \kappa m \rangle S_{m_1}^{(k_1)} T_{m_2}^{(k_2)} \quad (5.22a)$$

und des Skalarprodukts (Me61,eq.(C.87)) von Tensoroperatoren

$$\begin{aligned} S^{(k)} \cdot T^{(k)} &= (-1)^k \sqrt{2k+1} [S^{(k)} \times T^{(k)}]_0^{(0)} \\ S^{(k)} \cdot T^{(k)} &= \sum_q (-1)^q S_q^{(k)} T_{-q}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.22b)$$

* siehe (A4.6) und die folgende Anmerkung

sowie

$$Y_0^{(0)}(\Omega_q) = Y_{00}(\Omega_q) = 1/\sqrt{4\pi}$$

gilt

$$V_\pi(\vec{q}) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_\pi^2}{\mu_\pi^2} \left\{ -\sqrt{\frac{24\pi}{5}} \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) \sum_m Y_{2m}(\Omega_q) (-1)^m [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]_{-m}^{(2)} \right. \\ \left. + \sqrt{4\pi} \left(\frac{\mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} - 1 \right) \Gamma_\pi(q) Y_{00}(\Omega_q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right\} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

und mit den Definitionen

$$c^{(2)} = -\sqrt{\frac{24\pi}{5}} \quad (5.23a)$$

$$c^{(0)} = \sqrt{4\pi} \quad (5.23b)$$

$$w^{(2)}(q) = \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) \quad (5.23c)$$

$$w^{(0)}(q) = \left(\frac{\mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} - 1 \right) \Gamma_\pi(q) = -w^{(2)}(q) \quad (5.23d)$$

nimmt das Impulsraum-OPEP (5.20) folgende Form an:

$$V_\pi(\vec{q}) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_\pi^2}{\mu_\pi^2} \left\{ c^{(2)} w^{(2)}(q) \sum_m Y_{2m}(\Omega_q) (-1)^m [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]_{-m}^{(2)} \right. \\ \left. + c^{(0)} w^{(0)}(q) Y_{00}(\Omega_q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right\} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.24)$$

Anstelle der ausführlichen Exposition der Fourier-Rücktransformation

$$V_\pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} {}_{21}V_\pi(\vec{q}) \quad (5.25)$$

von (5.20) wird

$$W_m^{(\kappa)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} {}_{21}W_m^{(\kappa)}(\vec{q}) \quad (5.26a)$$

mit

$$W_m^{(\kappa)}(\vec{q}) = c^{(\kappa)} w^{(\kappa)}(q) Y_{\kappa m}(\Omega_q) \quad (5.26b)$$

$$(\kappa = 0 \text{ oder } \kappa = 2)$$

berechnet und anschließend via (5.24) in (5.25) eingesetzt.

Die entscheidende Idee (HS61) zur Separation der Variablen ist die Verwendung der aus jeder beliebigen Quantenmechanikvorlesung wohlbekannten Entwicklung der ebenen Welle nach Bessel- und Kugelflächenfunktionen (Ed74,eq.(5.8.3))

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{km} i^k j_k(qr) Y_{km}(\Omega_r) Y_{km}^*(\Omega_q) \quad (5.27)$$

für die beiden Radialkoordinaten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 in (5.25) bzw. (5.26) getrennt einzusetzen:

$$\begin{aligned} w_m^{(\kappa)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} c^{(\kappa)} \int dq q^2 \int d\Omega_q e^{+i\vec{q} \cdot \vec{r}_2} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_1} w^{(\kappa)}(q) Y_{\kappa m}(\Omega_q) \\ &= c^{(\kappa)} \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ m_1 m_2}} i^{k_1 - k_2} Y_{k_1 m_1}^*(\Omega_1) Y_{k_2 m_2}(\Omega_2) \\ &\quad \cdot \int d\Omega_q Y_{k_2 m_2}^*(\Omega_q) Y_{\kappa m}(\Omega_q) Y_{k_1 m_1}(\Omega_q) \cdot \int dq q^2 w^{(\kappa)}(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \end{aligned}$$

Mit dem Wigner-Eckart-Theorem (A2.22) gilt

$$\begin{aligned} \int d\Omega_q Y_{k_2 m_2}^*(\Omega_q) Y_{\kappa m}(\Omega_q) Y_{k_1 m_1}(\Omega_q) &= \langle k_2 m_2 | Y_m^{(\kappa)} | k_1 m_1 \rangle \\ &= \frac{(-1)^{k_1 - m_1}}{\sqrt{2\kappa + 1}} \langle k_2 m_2 k_1 - m_1 | \kappa m \rangle \langle k_2 || Y^{(\kappa)} || k_1 \rangle \end{aligned}$$

Setzt man das reduzierte Matrixelement (Ed74,eq.(5.4.5)) ein

$$\langle k_2 || Y^{(\kappa)} || k_1 \rangle = (-1)^{k_2} \sqrt{\frac{2\kappa + 1}{4\pi}} \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so folgt mit der Symmetrierelation (A2.6b) für C.G.-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \int d\Omega_q Y_{k_2 m_2}^*(\Omega_q) Y_{\kappa m}(\Omega_q) Y_{k_1 m_1}(\Omega_q) &= \frac{(-1)^{\kappa - m_1}}{\sqrt{4\pi}} \langle k_1 - m_1 k_2 m_2 | \kappa m \rangle \\ &\quad \cdot \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.28) \end{aligned}$$

Da nun $\kappa=0$ oder $\kappa=2$, ist $(-1)^\kappa=1$; mit (5.28), der Relation (Jac75,eq.(3.54))

$$(-1)^{-m_1} Y_{k_1 m_1}^*(\Omega_1) = Y_{k_1 -m_1}(\Omega_1) \quad (5.29)$$

und der Definition des Tensorprodukts (5.22) folgt

$$W_m^{(\kappa)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{c^{(\kappa)}}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k_1, k_2} i^{k_1-k_2} [Y^{(k_1)}(\Omega_1) \times Y^{(k_2)}(\Omega_2)]_m^{(2)} \quad (5.30)$$

$$\int dq q^2 w^{(\kappa)}(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \cdot \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Tensoranteil bedeutet dies

$$W_m^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\sqrt{\frac{6}{5}} \frac{2}{\pi} \sum_{k_1, k_2} i^{k_1-k_2} [Y^{(k_1)}(\Omega_1) \times Y^{(k_2)}(\Omega_2)]_m^{(2)} \quad (5.31)$$

$$\cdot \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int dq q^2 \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} r_\pi(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2)$$

und für den skalaren mit der Relation (A2.12b) sowie der Definition des Skalarprodukts von Tensoroperatoren (5.22)

$$W_m^{(0)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{2}{\pi} \sum_k Y^{(k)}(\Omega_1) \cdot Y^{(k)}(\Omega_2) \int dq q^2 \left(\frac{\mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} - 1 \right) r_\pi(q) j_k(qr_1) j_k(qr_2) \quad (5.32)$$

Entsprechendes Einsetzen (s.o.) liefert das variablenseparierte OPEP

$$V_\pi(r_1, r_2) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_\pi^2}{\mu_\pi^2} \left\{ -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{6}{5}} \sum_{k_1, k_2} i^{k_1-k_2} \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\cdot [Y^{(k_1)}(\Omega_1) \times Y^{(k_2)}(\Omega_2)]^{(2)} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]^{(2)}_{\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}$$

$$\cdot \int dq q^2 \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} r_\pi(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \quad (5.33)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_k Y^{(k)}(\Omega_1) \cdot Y^{(k)}(\Omega_2) \int dq q^2 \frac{\mu_\pi^2}{q^2 + \mu_\pi^2} r_\pi(q) j_k(qr_1) j_k(qr_2) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_k Y^{(k)}(\Omega_1) \cdot Y^{(k)}(\Omega_2) \int dq q^2 r_\pi(q) j_k(qr_1) j_k(qr_2) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \}$$

5.2.2 Konstruktion einer G-Matrix für das OPEP mittels einer simplen Korrelationsfunktion (Kre84),(Kle84b)

Durch die Lösung der Bethe-Goldstone-Gleichung (5.6) gelangt man vom OPEP $V_\pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ (5.33) zur entsprechenden G-Matrix G_π . Schreibt man die Bethe-Goldstone-Gleichung (5.6a) in der Form

$$G = V \left(1 + \frac{Q_F}{E - H_0} \right) G = V \Omega \quad (5.34)$$

so definiert dies die Korrelationsfunktion Ω , die ein Potential in die entsprechende G-Matrix überführt. Kennt man nun (einen plausiblen Ansatz für) die Korrelationsfunktion Ω , so kann man sich die aufwendige Prozedur der Lösung der Bethe-Goldstone-Gleichung ersparen. Dies ist genau der von Weise (Wei77) und Brown, Bäckman, Oset und Weise (B²OW77) eingeschlagene Weg, welche eine analytisch handhabbare Approximation zum lokalen Näherungsausdruck für die Korrelationsfunktion des Reid-Potentials als geeigneten Ansatz vorschlagen:

$$\Omega(\vec{r}) = 1 - j_0(q_c r) \quad (5.35a)$$

mit

$$q_c = 3.93 \text{ fm}^{-1} \quad (5.35b)$$

(siehe (B²OW77, Fig.2)). Das im vorigen Abschnitt demonstrierte Horie-Sasaki-Verfahren kommt nun für die G-Matrix

$$G_\pi(\vec{r}) = V_\pi(\vec{r}) \Omega(\vec{r}) \quad (5.36)$$

($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ → umgekehrte Vorzeichen in den (5.16), (5.25) entsprechenden Fouriertransformationen)

zur Anwendung, wenn auch nicht unwesentlich kompliziert durch das Auftreten der Korrelationsfunktion (5.35). Zunächst wird $G_\pi(\vec{r})$ durch Fouriertransformation in den Impulsraum überführt:

$$G_\pi(\vec{k}) = \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} G_\pi(\vec{r}) \quad (5.37)$$

$$G_\pi(\vec{k}) = \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V_\pi(\vec{q}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \Omega(\vec{p})$$

$$G_\pi(\vec{k}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_\pi(\vec{q}) \Omega(\vec{k} - \vec{q}) \quad (5.38)$$

da

$$\int d^3r e^{i(\vec{k}-\vec{q}-\vec{p})} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{q}-\vec{p}) \Rightarrow \vec{p} = \vec{k}-\vec{q}$$

Führt man nun eine Variablentransformation auf

$$\vec{q}' = \vec{k}-\vec{q} \quad (5.39a)$$

$$\Rightarrow d^3q' = -d^3q \quad (5.39b)$$

durch, so folgt (bei gleichzeitiger Umkehr der Integrationsgrenzen!)

$$G_{\pi}(\vec{k}) = \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} V_{\pi}(\vec{k}-\vec{q}') \Omega(\vec{q}')$$

und mit der Variablenumbenennung

$$\vec{k} \rightarrow \vec{p} ; \quad \vec{q}' \rightarrow \vec{q} \quad (5.40)$$

$$G_{\pi}(\vec{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_{\pi}(\vec{p}-\vec{q}) \Omega(\vec{q}) \quad (5.41)$$

Für die Fouriertransformierte $\Omega(\vec{q})$ der Ortsraumkorrelationsfunktion $\Omega(\vec{r})$ gilt

$$\Omega(\vec{q}) = \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} (1 - j_0(q_c r)) \quad (5.42)$$

und mit der Entwicklung der ebenen Welle (5.27) sowie Multiplikation mit $\sqrt{4\pi} Y_{00}^*(\Omega_r) = 1$

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{q}) &= (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) - \int dr r^2 \int d\Omega_r \sum_{\ell m} 4\pi i^{\ell} j_{\ell}(qr) Y_{\ell m}^*(\Omega_q) Y_{\ell m}(\Omega_r) j_0(q_c r) \\ &\quad \cdot \sqrt{4\pi} Y_{00}^*(\Omega_r) \end{aligned}$$

folgt wegen der Orthonormiertheit der Kugelflächenfunktionen (Jac75,eq.(3.56))

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{q}) &= (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) - \sqrt{4\pi} \int dr r^2 4\pi i^0 j_0(qr) j_0(q_c r) \underbrace{Y_{00}(\Omega_q)}_{= 1/\sqrt{4\pi}} \\ &= 1/\sqrt{4\pi} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\Omega(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) - 4\pi \int dr r^2 j_0(qr) j_0(q_c r)$$

was mit

$$\int_0^{\infty} dr r^2 j_n(kr) j_n(k'r) = \frac{\pi}{2k^2} \{ \delta(k-k') + (-1)^n \delta(k+k') \}$$

((Kle84b); ausgehend von (AS72,eq.(11.3.29)) zu beweisen) zu

$$\Omega(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) - \frac{2\pi^2}{q^2} \delta(q-q_c) \quad (5.43)$$

führt. Dies in (5.41) eingesetzt ergibt

$$G_{\pi}(\vec{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_{\pi}(\vec{p}-\vec{q}) \{ (2\pi)^3 \delta(\vec{q}) - \frac{2\pi^2}{q^2} \delta(q-q_c) \}$$

$$= V_{\pi}(\vec{p}) - \frac{1}{4\pi} \int dq \int d\Omega_q V_{\pi}(\vec{p}-\vec{q}) \delta(q-q_c)$$

oder

$$G_{\pi}(\vec{p}) = V_{\pi}(\vec{p}) - G_{\pi c}(\vec{p}) \quad (5.44a)$$

mit

$$G_{\pi c}(\vec{p}) = \frac{1}{4\pi} \int dq \int d\Omega_q \delta(q-q_c) V_{\pi}(\vec{p}-\vec{q}) \quad (5.44b)$$

Dieser korrelierte Anteil $G_{\pi c}(\vec{p})$ ist nun also für das OPEP (5.18) zu berechnen:

$$G_{\pi c}(\vec{p}) = - \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \int dq \delta(q-q_c) \int d\Omega_q \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{p}-\vec{q}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{p}-\vec{q})}{(\vec{p}-\vec{q})^2 + \mu_{\pi}^2} \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + (\vec{p}-\vec{q})^2} \right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.45)$$

Wählt man die Richtung von \vec{p} als z-Achse, so folgt

$$G_{\pi c}(\vec{p}) = - \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \int dq \delta(q-q_c) \int_0^{2\pi} d\varphi_q \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_q \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + p^2 + q^2 - 2pq\cos\vartheta_q} \right)^2$$

$$\frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{p^2 + q^2 + \mu_{\pi}^2 - 2pq\cos\vartheta_q} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$$

Nur Terme der Form $\vec{\sigma} \cdot \vec{q}$ hängen von φ_q ab. Schreibt man nun \vec{q} und $\vec{\sigma}$ explizite in Kugelkoordinaten:

$$\vec{q} = q(\sin\vartheta_q \cos\varphi_q, \sin\vartheta_q \sin\varphi_q, \cos\vartheta_q)$$

und entsprechend

$$\vec{\sigma} = \sigma(\sin\alpha \cos\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha)$$

so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{da } \int_0^{2\pi} \cos \varphi_q d\varphi_q = \int_0^{2\pi} \sin \varphi_q d\varphi_q = 0 \right) \\
 & \int_0^{2\pi} d\varphi_q \vec{\sigma} \cdot \vec{q} = \sigma q \cos \alpha \cos \varphi_q \int_0^{2\pi} d\varphi_q \\
 & \int_0^{2\pi} d\varphi_q \vec{\sigma} \cdot \vec{q} = 2\pi q \cos \varphi_q \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

und mit entsprechendem algebraischen Aufwand

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_q \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} = \pi q^2 \{ \sin^2 \varphi_q \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + (3 \cos^2 \varphi_q - 1) \hat{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \hat{\sigma}_2 \cdot \vec{p} \} \quad (5.47)$$

und nach weiteren mehr oder weniger trivialen algebraischen Manipulationen wie der Einführung des Tensoroperators $S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{p})$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\varphi_q \{ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} \} \\
 & = \frac{\pi}{3} [\{ 2(p^2 + q^2) - 4pq \cos \varphi_q \} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \{ 2p^2 - q^2 - 4pq \cos \varphi_q + 3q^2 \cos^2 \varphi_q \} S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{p})] \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Es verbleibt noch die Integration über $\gamma \equiv \cos \varphi_q$:

$$\begin{aligned}
 G_{\pi C}(\vec{p}) &= \frac{4\pi}{3} \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \frac{(\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2)^2}{32p^3 q_C^3} \int_{-1}^1 d\gamma \frac{2(p^2 + q^2) - 4pq_C \gamma}{\left[\gamma - \frac{1}{2pq_C} (\Lambda_{\pi}^2 + p^2 + q_C^2) \right]^2 \left[\gamma - \frac{1}{2pq_C} (p^2 + q_C^2 + \mu_{\pi}^2) \right]} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\
 &+ \int_{-1}^1 d\gamma \frac{2p^2 - q_C^2 - 4pq_C \gamma + 3q_C^2 \gamma^2}{\left[\gamma - \frac{1}{2pq_C} (\Lambda_{\pi}^2 + p^2 + q_C^2) \right] \left[\gamma - \frac{1}{2pq_C} (p^2 + q_C^2 + \mu_{\pi}^2) \right]} S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{p}) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

Die Integration kann mit Hilfe von in (BS80, §1.1.3.3) angegebenen unbestimmten Integralen durchgeführt werden (Kle84b):

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2 (fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b} \right), \quad \Delta = bf - ag \neq 0 \quad (\text{a.a.O., \#34})$$

Im Fall $a=1, f=1$ gilt (g in a umbenennend)

$$\int \frac{dx}{(b+x)^2 (a+x)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{b+x} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x} \right), \quad a \neq b$$

$$\int \frac{x dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b \quad (\text{a.a.O., \#35})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln(a+x) + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2} \ln(b+x) \quad (\text{a.a.O., \#36})$$

Mit der Notation

$$G_{\pi c}(\vec{p}) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} (I_{\pi c}^{\text{cen}}(\vec{p}) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + I_{\pi c}^{\text{ten}}(\vec{p}) S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{p}) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (5.50)$$

erhält man für den Zentral- bzw. Tensoranteil des korrelierten Anteils der OPE-G-Matrix (5.44)

$$I_{\pi c}^{\text{cen}}(p) = - \left\{ \frac{\Lambda_{\pi}^2 (\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2)}{[\Lambda_{\pi}^2 + (p-q_c)^2][\Lambda_{\pi}^2 + (p+q_c)^2]} + \frac{\mu_{\pi}^2}{4pq_c} \ln \frac{[(p-q_c)^2 + \mu_{\pi}^2][(p+q_c)^2 + \Lambda_{\pi}^2]}{[(p+q_c)^2 + \mu_{\pi}^2][(p-q_c)^2 + \Lambda_{\pi}^2]} \right\} \quad (5.51)$$

bzw.

$$I_{\pi c}^{\text{ten}}(p) = \left\{ \frac{\Lambda_{\pi}^2 - \mu_{\pi}^2}{8p^2} \frac{3(\Lambda_{\pi}^2 + p^2 + q_c^2)^2 - 4p^2(2\Lambda_{\pi}^2 + 3q_c^2)}{[\Lambda_{\pi}^2 + (p-q_c)^2][\Lambda_{\pi}^2 + (p+q_c)^2]} + \frac{4p^2(2\mu_{\pi}^2 + 3q_c^2) - 3(p^2 + q_c^2 + \mu_{\pi}^2)^2}{32p^3q_c} \ln \left(\frac{(p+q_c)^2 + \mu_{\pi}^2}{(p-q_c)^2 + \mu_{\pi}^2} \right) - \frac{4p^2(2\mu_{\pi}^2 + 3q_c^2) + 3(\Lambda_{\pi}^2 + p^2 + q_c^2)(\Lambda_{\pi}^2 - p^2 - q_c^2 - 2\mu_{\pi}^2)}{32p^3q_c} \ln \left(\frac{\Lambda_{\pi}^2 + (p+q_c)^2}{\Lambda_{\pi}^2 + (p-q_c)^2} \right) \right\} \quad (5.52)$$

Die Fourier-Rücktransformation der OPE-G-Matrix (5.44) in den Ortsraum führt dann auf die (5.33) entsprechende Formel

$$G_{\pi}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \left\{ - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{6}{5}} \sum_{k_1, k_2} i^{k_1 - k_2} \sqrt{(2k_1+1)(2k_2+1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot [\gamma^{(k_1)}(\Omega_1) \times \gamma^{(k_2)}(\Omega_2)]^{(2)} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]^{(2)} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right. \\ \left. + \int dq q^2 J_{\pi c}^{\text{ten}}(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_k \gamma^{(k)}(\Omega_1) \cdot \gamma^{(k)}(\Omega_2) \int dq q^2 J_{\pi c}^{\text{cen}}(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right\} \quad (5.53a)$$

mit

$$J_{\pi C}^{\text{ten}}(q) = \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) - I_{\pi C}^{\text{ten}}(q) \quad (5.53b)$$

$$J_{\pi C}^{\text{cen}}(q) = - \frac{q^2}{q^2 + \mu_\pi^2} \Gamma_\pi(q) - I_{\pi C}^{\text{cen}}(q) \quad (5.53c)$$

und

$$\Gamma_\pi(q) = \left(\frac{\Lambda_\pi^2 - \mu_\pi^2}{\Lambda_\pi^2 + q^2} \right)^2 \quad (5.53d)$$

Für große Werte von q_C und des Abschneideimpulses Λ_π geht die OPE-G-Matrix (5.53) in das OPEP (5.33) über; ist $q_C \rightarrow \Lambda_\pi$, so geht der Zentralanteil (5.53) in den Yukawaanteil (2. Summand) von (5.33) über, im umgekehrten Fall in den gesamten Zentralanteil von (5.33). V. Klemt hat eine detaillierte Untersuchung der Grenzfälle durchgeführt (Kle84b).

Die Formeln für die Radialanteile von G_π (5.53) sind, relativ zu denen für die Radialanteile von V_π (5.33), recht kompliziert. Figur 4 gibt einen graphischen Vergleich (auch für den Fall der im folgenden behandelten ρ -Austauschwechselwirkung).

5.2.3 Die ρ -Austauschwechselwirkung

Der (5.17) entsprechende Ausdruck für das ρ -Austauschpotential lautet (AB77)

$$V_\rho(q) = -4\pi \frac{f_\rho^2}{\mu_\rho^2} \frac{\vec{\sigma}_1 \times \vec{q} \cdot \vec{\sigma}_2 \times \vec{q}}{q^2 + \mu_\rho^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (5.54a)$$

$$\mu_\rho = \frac{m_\rho c}{\hbar} \quad (5.54b)$$

((Hol81) leitet den entsprechenden Ortsraumausdruck ab.) Mit Lagrange's Identität für Vektorprodukte

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{b} \cdot \vec{c}$$

gilt

$$\vec{\sigma}_1 \times \vec{q} \cdot \vec{\sigma}_2 \times \vec{q} = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 q^2 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}$$

und vermittels den von (5.17) auf (5.20) führenden analogen Transformationen (SKW80), (Con84, App.E) erhält man

$$V_\rho(q) = \frac{4\pi}{3} \frac{f_\rho^2}{\mu_\rho^2} \left\{ \frac{q^2}{q^2 + \mu_\rho^2} \Gamma_\rho(q) S_{12}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \hat{q}) + 2 \frac{\mu_\rho^2}{q^2 + \mu_\rho^2} \Gamma_\rho(q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right. \\ \left. - 2 \Gamma_\rho(q) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \right\} \quad (5.55a)$$

mit

$$\Gamma_\rho(q) = \left(\frac{\Lambda_\rho^2 - \mu_\rho^2}{\Lambda_\rho^2 + q^2} \right)^2 \quad (5.55b)$$

Außer in den Konstanten f_ρ^2 , μ_ρ und Λ_ρ unterscheidet sich $V_\rho(q)$ (5.55) von $V_\pi(q)$ (5.20) im Vorzeichen des Tensoranteils und durch einen zusätzlichen Faktor 2 im Zentralanteil. Die Tensorpotentiale von Pion und Rho-Meson heben einander also teilweise auf, und zwar umso stärker, je größer die NN ρ -Kopplungskonstante f_ρ^2 ist. Neuere Arbeiten (HP75), (Hol81) favorisieren ein "starkes ρ ", also ein schwächeres Tensorpotential. In dieser Arbeit wird der Wert von Höfler und Pietarinen (HP75), $f_\rho^2 = 4.86$ verwendet, für Λ_ρ benutze ich den z.B. von (BSW81) verwendeten Wert $\Lambda_\rho = 10 \text{ fm}^{-1}$.

Die Fourier-Rücktransformation von $V_\rho(q)$ (5.55) in den Ortsraum und der Übergang zur G-Matrix sind ganz analog dem OPEP-Fall.

5.2.4 Zusammenfassung: ($\pi+\rho$)-Austauschwechselwirkung

Die Impulsraum-Potentiale $V_\pi(q)$ (5.20) und $V_\rho(q)$ (5.55) werden durch Fourier-Rücktransformation in den Ortsraum nach der Methode von Horie und Sasaki in den Variablen der beiden Nukleonen separiert ((5.33) und entsprechend) und nach der von Brown, Bäckman, Oset und Weise (B²OW77) angegebenen Prozedur in G-Matrizen transformiert. Von den verschiedenen Kopplungskonstanten, Massen und Formfaktoren abgesehen unterscheiden sich beide Mesonenaustauschpotentiale nur durch das Vorzeichen des Tensoranteils und einen Faktor 2 im Zentralanteil. Die in die ($\pi+\rho$)-Austauschwechselwirkung eingehenden Parameter und Konstanten sind in Tabelle 5 zusammengefaßt. Im übrigen sind alle Potentiale bzw. Wechselwirkungen, wie dimensionsmäßig leicht zu ersehen, noch mit $\hbar c$ zu multiplizieren.

5.3 G-Matrix-Wechselwirkung von Ein-Boson-Austauschpotentialen (OBEPs) aus Kernmaterierechnungen

Trotz der großen Erfolge des Quarkmodells der Struktur von Hadronen ist die Mesontheorie der Kernkräfte* noch immer up to date.

"According to meson field theory, the interaction between two nucleons is mediated by the exchange of various mesons. The nucleons and mesons are described by local and renormalizable field theories, in which the particles are considered as elementary and pointlike. On the other hand, people now believe in the quark model ... in this scheme, the two-nucleon force is in fact a force between two three-body systems. To obtain from this picture an "effective" nucleon-nucleon potential for application in nuclear structure is obviously very complicated ... Of course, this does not mean that one should throw away all information about the NN-interaction obtained from usual meson theory. This picture had such an enormous success**, correlating a great amount of data (from NN-, N π - and $\pi\pi$ -scattering, electromagnetic form factor data) that it should be essentially right, at least for the outer- and intermediate-range part of the interaction ... we might hope that, for low-energy NN-scattering and nuclear structure ..., the inner part of the NN-interaction need not be known in such detail and can be described by a global repulsion provided by ω -exchange." (Ho181,p.126)

Ein-Boson-Austauschwechselwirkungen im engeren Sinn sind NN-Wechselwirkungen, die durch elementare Austauschprozesse genau eines Mesons hervorgerufen werden; der gleichzeitige Austausch etwa zweier Pionen wird nicht explizit behandelt, was dazu führt, daß

"a largely fictitious isoscalar scalar meson (the σ) is required to describe the intermediate range attraction of the force. This σ object with a mass of about 400 to 600 MeV is considered to approximate somehow the

* Für Nichtexperten gibt (Bri65,Ch.VI) eine gute Einführung.

** insbesondere auch die Vorhersage von Existenz und Eigenschaften der Vektormesonen (zu schweigen von skalaren)

continuum of the two-pion exchange ... in the T=0, S-wave state."
(Erk74,p196).

Den von K. Nakayama berechneten OBE-G-Matrizen liegt die von Holinde in (Hol81) angegebene Version des OBE-Potentials mit Abschneideimpuls $\Lambda = 1530$ MeV für alle Mesonen zugrunde ("HM3A"). Diese OBE-G-Matrizen hängen "im wesentlichen" vom Impulsübertrag sowie der Dichte ρ des nuklearen Mediums bzw. gemäß (Bur79,eq.(6.13))

$$\rho = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (5.56)$$

von dessen Fermiimpuls k_F ab. Nakayama gibt eine Parametrisierung nach Yukawa-Zentralpotentialen, Yukawa-Tensorpotentialen sowie Spin-Bahn-Potentialen an. Letztere werden hier ignoriert, was die Resultate aber nicht signifikant beeinflussen dürfte; Isakov et al. (IAS82) etwa kommen in ihrer schon erwähnten Studie bezüglich der Spin-Bahn-Potentiale zu folgendem Schluß:

"The role of spin-orbit forces reduces mainly to the appearance of spin-orbit splitting in the levels of the mean field of the nucleus." (IAS82, p.177/178)

Bei der Diagonalisierung des Einteilchenanteils des Hamiltonoperators (Kap. 3) wurde eine Spin-Bahn-Kraft (natürlich) berücksichtigt. Ohne die Spin-Bahn-Potentiale lautet der (5.20) analoge Ausdruck für Nakayama's OBE-Matrizen

$$\begin{aligned} G_{\text{OBE}}(q, \omega; k_F) = & \sum_{\alpha=1}^3 \left[\{ F_{\alpha}(\omega, k_F) + F'_{\alpha}(\omega, k_F) \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' + G_{\alpha}(\omega, k_F) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \right. \\ & + G'_{\alpha}(\omega, k_F) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \} \frac{\mu_{\alpha}^2}{q^2 + \mu_{\alpha}^2} \\ & + \{ H_{\alpha}(\omega, k_F) + H'_{\alpha}(\omega, k_F) \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \} S_{12}(\vec{q}) \frac{q^2}{q^2 + \mu_{\alpha}^2} \frac{\Lambda^2 - \mu_{\alpha}^2}{\Lambda^2 + q^2} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die sog. "Startenergie" ω ist in (5.6) mit $E = \epsilon_r + \epsilon_s$ zu identifizieren. Die OBE-G-Matrizen hängen von deren Wahl aber nicht empfindlich ab. Nakayama gibt die Dichteabhängigkeit der Stärkeparameter explizite an; für Kerne bedeutet dies - nach einer Fouriertransformation - eine Radialabhängigkeit auch dieser Stärkeparameter. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird diese nicht berücksich-

tigt; für unsere Zwecke genügen G-Matrizen zu einem fixen Dichtewert. Für die Rechnungen wurden folgende OBE-G-Matrizen verwendet:

$$G_{\text{OBE}}^{(\text{in})} := G_{\text{OBE}}(q, \omega = -20 \text{ MeV}; k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}) \quad (5.58a)$$

$$G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})} := G_{\text{OBE}}(q, \omega = -40 \text{ MeV}; k_F = 0.95 \text{ fm}^{-1}) \quad (5.58b)$$

Die in (5.57) definierten Stärkeparameter sind der Tabelle 6 zu entnehmen.

5.4 Effektive "Migdal-Wechselwirkung"

Migdal's Anwendung (Mig67) von Landau's Theorie auf endliche Fermisysteme beruht auf dem Quasiteilchenbild (nuklearer) Elementaranregungen. Eine gut lesbare qualitative Motivation findet sich etwa in (Mig77, Introd. to Ch.V), die exakte Formulierung im Übersichtsartikel von Speth et al. (SWW77), der auch insbesondere eine detaillierte Diskussion des im Rahmen dieser Theorie i.a. verwendeten Wechselwirkungsansatzes enthält (SW77, p.148-151). Dieser lautet (im Teilchen-Loch-Fall)

$$F_{\text{Mig}}^{\text{ph}}(\vec{r}, \vec{r}') = C_0 (f_0(\rho) + f'_0(\rho) \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' + g_0(\rho) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' + g'_0(\rho) \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.59)$$

Die Dichteabhängigkeit der Parameter berücksichtigt die endliche Kernaushdehnung

$$f(\rho(r)) = \frac{\rho(r)}{\rho(0)} f^{\text{in}} + (1 - \frac{\rho(r)}{\rho(0)}) f^{\text{ex}} \quad (5.60)$$

wobei $\rho(0)$ die Dichte im Kernmittelpunkt ist und

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r - R_M)/\alpha_M}} \quad (5.61)$$

der aus den Hofstadterschen Elektronenstreuexperimenten geläufige Fermifunktionsansatz für die Kerndichte (die Parameter R_M bzw. α_M sind von der Größenordnung des Kernradius bzw. des entsprechenden Dichteabfallparameters). Die Normierungskonstante C_0 ist das Inverse der Zustandsdichte (pro Volumen und Energieintervall) an der Fermioberfläche eines wechselwirkungsfreien Fermigases,

und mit der hier getroffenen Wahl für die effektive Masse erhält man (Con84, eq.(3.11))

$$C_0 = 386 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3 \quad (5.62)$$

Im Zweiteilchenfall wählt man einen (5.59) entsprechenden Ansatz für $F_{\text{Mig}}^{\text{pp}}$. Allerdings ist hier eine andere Parametrisierung aus Gründen, die nun erläutert werden (Kle82b), vorzuziehen.

Mit den Spin- bzw. Isospinaustauschoperatoren

$$P_\sigma = 1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \quad (5.63a)$$

bzw.

$$P_\tau = 1 + \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \quad (5.63b)$$

definiert man Projektionsoperatoren auf Gesamtspin 0 bzw. Gesamtisospin 0

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} (1 - P_\sigma) = \frac{1}{4} (1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \quad (5.64a)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} (1 - P_\tau) = \frac{1}{4} (1 - \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \quad (5.64b)$$

sowie auf Gesamtspin 1 bzw. Gesamtisospin 1

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} (1 + P_\sigma) = \frac{1}{4} (3 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \quad (5.64c)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} (1 + P_\tau) = \frac{1}{4} (3 + \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \quad (5.64d)$$

Aus diesen Definitionen ergibt sich

$$\mathbb{1}_{\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}'} = \Pi_0 + \Pi_1 \quad (5.65a)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' = \Pi_1 - 3\Pi_0 \quad (5.65b)$$

und entsprechend für $\mathbb{1}_\tau$ und $\tau \cdot \tau'$. Damit kann man den (5.59) entsprechenden Ansatz so formulieren:

$$F_{\text{Mig}}^{\text{pp}}(\vec{r}, \vec{r}') = (\alpha_{00} \Pi_0 \Lambda_0 + \alpha_{11} \Pi_1 \Lambda_1 + \alpha_{01} \Pi_0 \Lambda_1 + \alpha_{10} \Pi_1 \Lambda_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (5.66)$$

wobei der Zusammenhang zwischen den beiden Parametersätzen durch folgende Relationen gegeben ist:

$$\alpha_{00} = f_0 - 3f'_0 - 3g_0 + 9g'_0 \quad (5.67a)$$

$$\alpha_{11} = f_0 + f'_0 + g_0 + g'_0 \quad (5.67b)$$

$$\alpha_{01} = f_0 + f'_0 - 3g_0 - 3g'_0 \quad (5.67c)$$

$$\alpha_{10} = f_0 - 3f'_0 + g_0 - 3g'_0 \quad (5.67d)$$

und umgekehrt

$$f_0 = \frac{1}{16} (\alpha_{00} + 9\alpha_{11} + 3\alpha_{01} + 3\alpha_{10}) \quad (5.68a)$$

$$f'_0 = \frac{1}{16} (-\alpha_{00} + 3\alpha_{11} + \alpha_{01} - 3\alpha_{10}) \quad (5.68b)$$

$$g_0 = \frac{1}{16} (-\alpha_{00} + 3\alpha_{11} - 3\alpha_{01} + \alpha_{10}) \quad (5.68c)$$

$$g'_0 = \frac{1}{16} (\alpha_{00} + \alpha_{11} - \alpha_{01} - \alpha_{10}) \quad (5.68d)$$

$\Pi_0 \Lambda_0$ und $\Pi_1 \Lambda_1$ projizieren nun auf symmetrische Zustände im Spin-Isospin-Raum. Wendet man diese Operatoren auf eine total antisymmetrische Zustandsfunktion an, so muß deren Ortsanteil antisymmetrisch sein, soll die resultierende Zustandsfunktion total antisymmetrisch sein;

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') (\alpha_{00} \Pi_0 \Lambda_0 + \alpha_{11} \Pi_1 \Lambda_1) |\psi\rangle$$

ist aber wegen der Symmetrie des Deltafunktionenoperators in den Ortskoordinaten jedenfalls total symmetrisch, so daß alle Matrixelemente vom Typ

$$(a) \langle \nu_1 \nu_2, J | \delta(\vec{r}-\vec{r}') (\alpha_{00} \Pi_0 \Lambda_0 + \alpha_{11} \Pi_1 \Lambda_1) | \nu_3 \nu_4, J \rangle_{(a)}$$

verschwinden. Anders formuliert: das Pauliprinzip erzwingt folgende "Summenregeln":

$$\alpha_{00} = f_0 - 3f'_0 - 3g_0 + 9g'_0 = 0 \quad (5.69a)$$

$$\alpha_{11} = f_0 + f'_0 + g_0 + g'_0 = 0 \quad (5.69b)$$

In dem (5.59) im Zweiteilchenfall entsprechenden Ansatz (5.66) gibt es also tatsächlich nur zwei freie Parameter. Mit der wohlbekannten Relation für Matrixelemente von Potentialoperatoren bezüglich Slaterdeterminantenbasen

$$\begin{aligned} (a) \langle 12 | V | 34 \rangle_{(a)} &= (p) \langle 12 | V | 34 \rangle_{(p)} - (p) \langle 12 | V | 43 \rangle_{(p)} \\ &:= \langle 12 | V | 34 \rangle_{\text{dir}} - \langle 12 | V | 34 \rangle_{\text{ex}} \end{aligned} \quad (5.70)$$

((a): antisymmetrischer, (p): Produktzustand) gilt daher

$$(a) \langle v_1 v_2, J | F_{\text{Mig}}^{\text{pp}} | v_3 v_4, J \rangle_{(a)} = (p) \langle v_1 v_2, J | \delta(\vec{r}-\vec{r}') (\alpha_{01} \Pi_0 \Lambda_1 + \alpha_{10} \Pi_1 \Lambda_0) \{ | v_3 v_4, J \rangle_{(p)} - | v_4 v_3, J \rangle_{(p)} \}$$

und da $\Pi_0 \Lambda_1$ und $\Pi_1 \Lambda_0$ auf antisymmetrische Zustände im Spin-Isospin-Raum (und $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ auf symmetrischen Ortsraum) projizieren, gilt

$$-\delta(\vec{r}-\vec{r}') (\alpha_{01} \Pi_0 \Lambda_1 + \alpha_{10} \Pi_1 \Lambda_0) | v_4 v_3, J \rangle_{(p)} = \delta(\vec{r}-\vec{r}') (\alpha_{01} \Pi_0 \Lambda_1 + \alpha_{10} \Pi_1 \Lambda_0) | v_3 v_4, J \rangle_{(p)}$$

und somit

$$(a) \langle v_1 v_2, J | F_{\text{Mig}}^{\text{pp}} | v_3 v_4, J \rangle_{(a)} = 2 (p) \langle v_1 v_2, J | F_{\text{Mig}}^{\text{pp}} | v_3 v_4, J \rangle_{(p)} \quad (5.71)$$

mit $F_{\text{Mig}}^{\text{pp}}$ (5.66) sowie den Pauliprinzip-Summenregeln (5.69).

Der Teilchen-Loch-Fall unterscheidet sich prinzipiell nicht vom Zweiteilchenfall. Empirische Fits ergaben aber Parameter f_0 , f'_0 , g_0 , g'_0 , welche die Summenregeln (5.69) nicht erfüllen. Man behalf sich (meine Interpretation!) provisorisch mit dem ad hoc-Argument, daß Teilchen- und Lochzustände tatsächlich (energetisch) unterscheidbar sind, und Teilchen-Lochzustände daher nicht total antisymmetrisch sein müssen. Man kann dann einen Teilchen-Loch-Zustand in eine total symmetrische und eine total antisymmetrische Komponente zerlegen

$$| v_1 v_2^{-1}, J \rangle = | v_1 v_2^{-1}, J \rangle_{(s)} + | v_1 v_2^{-1}, J \rangle_{(a)} \quad (5.72)$$

und erhält analog (5.71)

$$\langle v_1 v_2^{-1}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{ph}} | v_3 v_4^{-1}, J \rangle = 2 (p) \langle v_1 v_2^{-1}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{ph}} | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{(p)} \quad (5.73)$$

(wobei sich der Index (p) in diesem Fall auf die ungekoppelten Zweiteilchenzustände entsprechend (2.24) bezieht). Die Summenregeln (5.69) gelten in diesem Fall natürlich nicht.

Diese unbefriedigende Situation konnte durch die Arbeit von Bäckman et al. (B²KS80) zum Thema "Pauli Principle Sum Rules and Consistency Relations for

Phenomenologically Adjusted Fermi Liquid Parameters" überwunden werden: Die Summenregeln werden auch im Teilchen-Loch-Fall erfüllt, wenn man den Beitrag des $(\pi+\rho)$ -Potentials berücksichtigt sowie Teilchen-Loch-Spektrum und Teilchen-Loch-Wechselwirkung konsistent wählt (das experimentelle Spektrum enthält "coupling to phonons", was eine explizite Berücksichtigung der stark repulsiven "induced interaction" bedingt; siehe auch Diskussion in Teil III).

Anders als im Fall von Wechselwirkungen endlicher Reichweite muß man also für Deltafunktions-Wechselwirkungen keine Austauschmatrixelemente - (5.70) - berechnen; die Faktoren 2 in (5.71) bzw. (5.73) werden in die zunächst durch (5.59) bzw. (5.66) definierten Parameter einbezogen.

5.5 Das Coulombpotential

Das abstoßende elektrostatische Coulombpotential

$$V_C(r) = \frac{e^2}{r} \quad (5.74a)$$

wirkt nur zwischen Protonen. (5.74a) ist in elektrostatischen cgs- bzw. Gauß-einheiten formuliert und gibt V_C in erg, wenn e in esu (Tabelle 7) eingesetzt wird. Die Umrechnung auf MeV geschieht mit dem Umrechnungsfaktor γ (Tabelle 7)

$$V_C(r) = \frac{e^2}{\gamma} \frac{1}{r} \quad (5.74b)$$

Das in Kap. 5.2 vorgestellte Horie-Sasaki-Verfahren ist auf das Coulombpotential nicht ohne weiteres anwendbar, da man bei der Durchführung der Fouriertransformation auf Schwierigkeiten stößt:

$$\begin{aligned} V_C(q) &= \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V_C(r) \\ &= \frac{e^2}{\gamma} 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{r} \\ &= \frac{e^2}{\gamma} 2\pi \int_0^\infty dr r \left[\frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\vartheta} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{e^2}{\gamma} 2\pi \int_0^\infty dr r \frac{2\sin qr}{qr} \\ &= \frac{e^2}{\gamma} 2\pi \int_0^\infty \sin qr dr = ? \end{aligned}$$

Man kommt aber zum Ziel, wenn man V_C durch folgenden Grenzprozeß definiert (Kle82b):

$$V_C(r) = \frac{e^2}{Y} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\mu \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \right) \quad (5.75)$$

Für die Fouriertransformierte des Yukawapotentials

$$V_Y(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (5.76)$$

gilt nun

$$\begin{aligned} V_Y(q) &= \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V_Y(r) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^\infty dr r^2 e^{iqr\cos\vartheta} \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \left[\frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{iqr} \right]_{-1}^1 \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \frac{2\sin qr}{qr} \\ &= \frac{4\pi}{\mu q} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin qr \end{aligned} \quad (5.77)$$

und da (Dwi61,eq.(860.80))

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin qr &= \frac{q}{q^2 + \mu^2} \\ \text{folgt} \quad V_Y(q) &= \frac{4\pi}{\mu^3} \frac{\mu^2}{q^2 + \mu^2} \end{aligned} \quad (5.78)$$

und mit (5.75) für die Fouriertransformierte des Coulombpotentials

$$V_C(q) = \frac{e^2}{Y} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\mu \frac{4\pi}{\mu^3} \frac{\mu^2}{q^2 + \mu^2} \right) \quad (5.79)$$

Die Fourier-Rücktransformation ist genau wie in Kap. 5.2 durchzuführen. Da das Coulombpotential im Gegensatz zum NN-Potential keinen "hard core" hat, entfällt der Übergang zu einer G-Matrix.

6. Die Matrixdarstellungen der effektiven NN-Restwechselwirkungen

In der Ortsdarstellung sind die Wechselwirkungen in Radial- sowie Spin-Winkel-Anteil separiert. Für Deltafunktions-Wechselwirkungen gilt dies trivialerweise. Im Fall der im Impulsraum gegebenen Wechselwirkungen endlicher Reichweite G_π (5.44) sowie G_{OBE} (5.57) ergibt sich diese Separation auf leicht ersichtliche Art bei der Fourier(-Rück=)transformation in den Ortsraum. Die Berechnung des Spin-Winkel-Anteils der Matrixelemente kann mit den Techniken der Drehimpulsalgebra analytisch durchgeführt werden; für die Wechselwirkungen endlicher Reichweite erweist sich an dieser Stelle der Vorteil der Variablenseparation mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("I"). Die Radialintegration wird für Deltafunktions-Wechselwirkungsmatrixelemente numerisch mittels eines modifizierten Gauß-Hermite-Verfahrens (Kle83b) durchgeführt. Im Fall der Wechselwirkungen endlicher Reichweite kann sie größtenteils analytisch mit dem von Horie und Sasaki (HS61) angegebenen Verfahren ("II") bewältigt werden. Eine verbleibende Integration über die Radialkoordinate im Impulsraum wird mit dem gleichen numerischen Verfahren gehandhabt wie die Radialintegration für Deltafunktions-Wechselwirkungsmatrixelemente.

Die Relationen zwischen Restwechselwirkungsmatrixelementen - jeweils für den direkten und den Austauschanteil - in den beiden Kopplungsschemata (ph bzw. pp) sind im Anhang 4 zusammengestellt. Es genügt also die Berechnung der Spin-Winkel-Anteile in einem der beiden Kopplungsschemata; die "Umkopplung" ist relativ trivial. Die Spin-Winkel-Anteile der Matrixelemente für die verschiedenen Wechselwirkungstypen sind im Anhang 5 tabelliert.

Zunächst beschreibe ich die Prozedur zur Berechnung von Deltafunktions-Wechselwirkungsmatrixelementen, da dies die Diskussion im Fall der Matrixelemente von Wechselwirkungen endlicher Reichweite erheblich vereinfacht.

6.1 Matrixelemente von Deltafunktions-Wechselwirkungen

Für Deltafunktions-Wechselwirkungen genügt die Berechnung "direkter" Matrixelemente (Kap. 5.4). Die Matrixdarstellung der Teilchen-Loch-Migdalwechselwirkung (5.59) ist daher

$$\langle v_1 t_1 (v_2 t_2)^{-1}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{ph}} | v_3 t_3 (v_4 t_4)^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \quad (6.1)$$

$$= \langle v_1 v_2^{-1}, J | \delta(\vec{r} - \vec{r}') | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \{ f_0 \langle t_1 t_4 | \tau | t_2 t_3 \rangle_{\text{dir}} + f'_0 \langle t_1 t_4 | \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' | t_2 t_3 \rangle_{\text{dir}} \} \\ + \langle v_1 v_2^{-1}, J | \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \{ g_0 \langle t_1 t_4 | \tau | t_2 t_3 \rangle_{\text{dir}} + g'_0 \langle t_1 t_4 | \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' | t_2 t_3 \rangle_{\text{dir}} \}$$

Die Berechnung der Isospinmatrixelemente ist einfach, auch die für $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}'$, da

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' = 2P_{\tau} - \tau_{\tau}$$

nach (5.63), und

$$P_{\tau} |tt'\rangle = |t't\rangle$$

bekanntlich. Für doppelt-magische Kerne gilt $t_1=t_2$ und $t_3=t_4$, wobei $t_1 \neq t_3$ möglich ist (Wechselwirkung zwischen $\pi\pi^{-1}$ - und $\nu\nu^{-1}$ -Konfigurationen); für deren Teilchen-Loch-Isobare hingegen gilt $t_1=t_3 \neq t_2=t_4$.

Im folgenden referiere ich die Berechnung des Winkelanteils von $\langle v_1 v_2^{-1}, J | \delta(\vec{r} - \vec{r}') | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir}}$ als einfachen aber exemplarischen Fall für die Berechnung der (Spin-)Winkelanteile von Wechselwirkungsmatrixelementen. Wegen der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen gilt (Jac75,eq.(3.56))

$$\begin{aligned} \delta(\Omega - \Omega') &= \langle \Omega | \Omega' \rangle = \sum_{\ell, m} \langle \Omega | Y_m^{(\ell)} \rangle \langle Y_m^{(\ell)} | \Omega' \rangle \\ &= \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega') \\ &= \sum_{\ell, m} (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell -m}(\Omega') \quad \text{mit (5.29)} \\ &= \sum_{\ell} Y^{(\ell)}(\Omega) \cdot Y_{\ell}(\Omega') \quad \text{mit (5.22)} \end{aligned}$$

$$\delta(\Omega - \Omega') = \sum_{\ell} Y_{\ell}(\Omega) \cdot Y_{\ell}(\Omega') \quad (6.2)$$

Der Winkelanteil des Wechselwirkungsoperators ist damit variablensepariert - wozu im Fall von Wechselwirkungen endlicher Reichweite das Horie-Sasaki-Verfahren ("I") vonnöten ist. Mit der Relation (A4.1) und der Beziehung (Ed74, eq.(7.1.6))

$$\begin{aligned}
 & \langle \alpha_1 j_1, \alpha_2 j_2; J | S^{(k)} \cdot T^{(k)} | \alpha_3 j_3, \alpha_4 j_4; J \rangle \\
 & = (-1)^{j_2+j_3+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 j_1 || S^{(k)} || \alpha_3 j_3 \rangle \langle \alpha_2 j_2 || T^{(k)} || \alpha_4 j_4 \rangle
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 & \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 (\frac{1}{2} \ell_2 j_2)^{-1}, J | \delta(\Omega - \Omega') | \frac{1}{2} \ell_3 j_3 (\frac{1}{2} \ell_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\
 & = \sum_L (2L+1) (-1)^{j_2+j_3+L} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \\
 & \quad \sum_{\ell} \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, L | Y^{(\ell)}(\Omega) \cdot Y^{(\ell)}(\Omega') | (\frac{1}{2} \ell_2) j_2 (\frac{1}{2} \ell_3) j_3, L \rangle_{\text{dir}} \\
 & = \sum_L (2L+1) (-1)^{j_2+j_3+L} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \sum_{\ell} (-1)^{j_2+j_4+L} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & L \\ j_3 & j_2 & \ell \end{Bmatrix} \\
 & \quad \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 || Y^{(\ell)}(\Omega) || \frac{1}{2} \ell_2 j_2 \rangle \langle \frac{1}{2} \ell_4 j_4 || Y^{(\ell)}(\Omega') || \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \rangle
 \end{aligned}$$

und mit den reduzierten Matrixelementen nach Rotenberg (Rot59, eq.(1.22'), p.6)

$$\begin{aligned}
 \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 || Y^{(\ell)} || \frac{1}{2} \ell_2 j_2 \rangle & = (-1)^{j_1-1/2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)} \\
 & \quad \frac{1}{2} [1 + (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell}] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ell \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

sowie $(-1)^{2j_2} = -1 = (-1)^{2j_4}$ ergibt sich mit der Notation

$$\begin{aligned}
 j(1234) & = \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)} \\
 j(1234) & = 4 \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \quad (\text{mit (2.27)})
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

und einer Symmetrierelation für 6j-Symbole

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 \left(\frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right)^{-1}, J \middle| \delta(\Omega - \Omega') \middle| \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \left(\frac{1}{2} \ell_4 j_4 \right)^{-1}, J \right\rangle_{\text{dir}} \\
 &= \frac{(-1)^{j_1+j_3+1}}{16\pi} j(1234) \sum_{\ell} \left(\sum_L (2\ell+1)(2L+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & \ell \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \right) \\
 & \quad [1+(-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell}] [1+(-1)^{\ell_3+\ell_4+\ell}] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ell \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_3 & \ell \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wendet man auf den Ausdruck in runden Klammern die Orthogonalitätsrelation (A4.3a), auf das letzte 3j-Symbol die Symmetrierelationen (A2.6) sowie die Paritätserhaltung

$$(-1)^{\ell_1+\ell_2} = (-1)^{\ell_3+\ell_4} \quad (6.5)$$

an, so resultiert

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 \left(\frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right)^{-1}, J \middle| \delta(\Omega - \Omega') \middle| \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \left(\frac{1}{2} \ell_4 j_4 \right)^{-1}, J \right\rangle_{\text{dir}} \\
 &= \frac{(-1)^{k_1+k_3}}{2\pi} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} [1+(-1)^{\ell_1+\ell_2+J}] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Da die Variablenseparation mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("I") für die Winkelabhängigkeit der Zentralkraft

$$\sum_k \gamma^{(k)}(\Omega) \cdot \gamma^{(k)}(\Omega')$$

liefert (s. Kap. 5.2), ist die Berechnung des Winkelanteils der spinunabhängigen Zentralkraft der zu (6.6) führenden ganz analog. In gleicher Weise basiert die Berechnung des Spin-Winkel-Anteils der spinabhängigen Zentralkraft auf der des Spin-Winkels-Anteils von $\langle v_1 v_2^{-1}, J \middle| \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \middle| v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir}}$. Diese ist komplizierter als die entsprechende im spinunabhängigen Fall (und im Anhang 4 skizziert). Im übrigen wird, wenn auch etwas umständlich, die Berechnung des Spin-Winkelanteils von Deltapotentialen von de Shalit und Feshbach (dSF74, Ch.V) durchgeführt.

Der Radialanteil von $|v_1 v_2^{-1}, J\rangle_{(p)}$ ist durch $R_{n_1 \ell_1 j_1}(r) R_{n_2 \ell_2 j_2}(r)$ mit den durch (3.3) definierten Funktionen gegeben. Entscheidend für die Wahl des - numeri-

schen - Integrationsverfahrens für den Radialanteil (Kle83b) von (6.1) ist die Tatsache, daß $R_{n_1 l_1 j_1}(r) R_{n_2 l_2 j_2}(r)$ von der Form $f(x^2) e^{-x^2}$ (mit $x = r/b$) ist. Für Funktionen dieses Typs ist das Gauß-Hermite-Verfahren (Str74, Ch.3) anwendbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x^2) \approx \sum_{\substack{i=-N \\ i \neq 0}}^N g_i f(x_i^2) \quad \text{mit } g_{-i} = g_i \quad (6.7)$$

welches Polynome in x^2 bis zur Ordnung $(2N-1)$ exakt integriert. Im vorliegenden Fall ist $x \geq 0$. Uns interessiert also

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} f(x^2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x^2) \quad (6.8)$$

Es empfiehlt sich eine Transformation auf die Variable

$$\begin{aligned} z &= x^2 \\ dz &= 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

und daher

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} f(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} f(z) \quad (6.10)$$

Andererseits gilt

$$x_i^2 = x_{-i}^2 = z_i$$

und wegen $g_i = g_{-i}$ (6.7) folgt

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=-N \\ i \neq 0}}^N g_i f(x_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (g_{-i} + g_i) f(x_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (2g_i) f(z_i) \quad (6.11)$$

und zusammenfassend

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} f(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} f(z) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (2g_i) f(z_i) \quad (6.12)$$

Die Radialanteile von (6.1) sind durch

$$R_{1234}^{(n)} = \int_0^{\infty} d e^{-2x^2} x^2 f(x^2) \quad (6.13a)$$

mit

$$f(x^2) = R_1(x)R_2(x)R_3(x)R_4(x) \cdot \begin{cases} 1, & n=0 \\ \rho(x), & n=1 \end{cases} \quad (6.13b)$$

und

$$x = r/b \quad (6.13c)$$

gegeben. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2} x \\ x^2 &= \frac{1}{2} y^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

folgt

$$\int_0^\infty dx e^{-2x^2} x^2 f(x^2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty dy e^{-y^2} y^2 f(y^2) \quad (6.15)$$

Da nach (6.12)

$$\int_0^\infty dy e^{-y^2} y^2 f(y^2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} z f(z) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (2g_i) f(z_i) z_i$$

mit $z_i = y_i^2 = 2x_i^2$, folgt

$$R_{1234}^{(n)} = \int_0^\infty dx e^{-2x^2} x^2 f(x^2) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N (2g_i) f(x_i^2) x_i^2 \quad (6.16)$$

Die Gewichte g_i und Stützstellen x_i wurden den Tafeln in (SS66) entnommen; die Stützstellenzahl ist $N=40$.

Im Computerprogramm wird mit der Parametrisierung der Migdalwechselwirkung nach den Projektionsoperatoren $\Pi_0, \Pi_1, \Lambda_0, \Lambda_1$ (Kap. 5.4) gearbeitet. Mit der Notation für die Spin-Winkelanteile

$$\hat{C}_0^{1234} = \left\langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 \left(\frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right)^{-1, J} \middle| \Pi_0 \delta(\Omega - \Omega') \middle| \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \left(\frac{1}{2} \ell_4 j_4 \right)^{-1, J} \right\rangle_{\text{dir}} \quad (6.17a)$$

$$\hat{C}_1^{1234} = \left\langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 \left(\frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right)^{-1, J} \middle| \Pi_1 \delta(\Omega - \Omega') \middle| \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \left(\frac{1}{2} \ell_4 j_4 \right)^{-1, J} \right\rangle_{\text{dir}} \quad (6.17b)$$

und der durch (6.13) definierten Notation für die Radialanteile gilt für doppelt-magische Kerne

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1 t (v_2 t)^{-1}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{ph}} | v_3 t' (v_4 t')^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\
 &= \frac{1}{b^3} \sum_{n=0}^1 R_{1234}^{(n)} \left\{ \frac{1}{2} [\alpha_{00}^{(n)} (1 - \delta_{tt'}) + \alpha_{01}^{(n)} (1 + \delta_{tt'})] \hat{C}_0^{1234} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} [\alpha_{11}^{(n)} (1 + \delta_{tt'}) + \alpha_{10}^{(n)} (1 - \delta_{tt'})] \hat{C}_1^{1234} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

und für ihre Teilchen-Loch-Isobare

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1 t (v_2 - t)^{-1}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{ph}} | v_3 t (v_4 - t)^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\
 &= \frac{1}{b^3} \sum_{n=0}^1 R_{1234}^{(n)} \left\{ \frac{1}{2} [\alpha_{01}^{(n)} - \alpha_{00}^{(n)}] \hat{C}_0^{1234} + \frac{1}{2} [\alpha_{11}^{(n)} - \alpha_{10}^{(n)}] \hat{C}_1^{1234} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

wobei

$$\alpha_{\alpha}^{(0)} = \alpha_{\alpha}^{\text{ex}} \tag{6.20a}$$

$$\alpha_{\alpha}^{(1)} = \alpha_{\alpha}^{\text{in-}\alpha\text{ex}} \tag{6.20b}$$

gemäß (5.60). Mit den entsprechend definierten Spin-Winkelanteilen im Zweiteilchenfall

$$C_0^{1234} = \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | \pi_0 \delta(\Omega - \Omega') | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{dir}}$$

$$C_1^{1234} = \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | \pi_1 \delta(\Omega - \Omega') | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{dir}}$$

folgt analog für gg-Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne

$$\langle v_1 t v_2 t, J | F_{\text{Mig}}^{\text{pp}} | v_3 t v_4 t, J \rangle_{\text{dir}} = \frac{1}{b^3} \sum_{n=0}^1 R_{1234}^{(n)} \alpha_{01}^{(n)} C_0^{1234} \tag{6.21}$$

und für uu-Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1^{-1/2} v_1^{1/2}, J | F_{\text{Mig}}^{\text{pp}} | v_3^{-1/2} v_4^{1/2}, J \rangle_{\text{dir}} \\
 &= \frac{1}{b^3} \sum_{n=0}^1 R_{1234}^{(n)} \left\{ \frac{\alpha_{01}^{(n)}}{2} C_0^{1234} + \frac{\alpha_{10}^{(n)}}{2} C_1^{1234} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Anzumerken bleibt, daß sich die in den RPA-Gleichungen auftretenden B-Matrizen im Teilchen-Loch-Fall, im Gegensatz zum Zweiteilchenfall, strukturell von den TDA-Matrizen unterscheiden. Für Deltapotentiale lassen sie sich jedoch durch Linearkombinationen aus diesen erzeugen; Näheres siehe Anhang 4.3.

6.2 Matrixelemente von Wechselwirkungen endlicher Reichweite (Zentral- und Tensor-Wechselwirkungen)

6.2.1 Allgemeine Struktur

Die Koordinatenabhängigkeit von durch das Horie-Sasaki-Verfahren variablenseparierten Zentral- und Tensor-Wechselwirkungen kann auf folgende gemeinsame Form gebracht werden:

$$v^{(\kappa)}(r_1, r_2, \Omega_1, \Omega_2, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = \mathcal{Y}^{(\kappa)}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \cdot \sum_{k_1, k_2} W^{(k_1, k_2; \kappa)}(\Omega_1, \Omega_2) v^{(k_1, k_2; \kappa)}(r_1, r_2) \quad (6.23a)$$

mit

$$\mathcal{Y}^{(\kappa)}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = \begin{cases} \vec{\sigma}_1^{(n)} \cdot \vec{\sigma}_2^{(n)}, \kappa=0 \\ [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]^{(2)}, \kappa=2 \end{cases} \quad (\text{s. (A4.7)}) \quad (6.23b)$$

und einem Radialanteil v von der Form

$$v^{(k_1, k_2; \kappa)}(r_1, r_2) = \int_0^\infty dq q^2 u^{(\kappa)}(q) j_{k_1}(qr_1) j_{k_2}(qr_2) \quad (6.23c)$$

ist. Da wir nicht zu "gutem" Isospin koppeln, können wir die relativ triviale Isospinabhängigkeit für den Moment ignorieren. Zur Lösung der Zweiteilchen- bzw. Zweiloch-RPA-Gleichungen sind nun Matrixelemente folgenden Typs zu berechnen (zur Definition direkter und Austauschmatrixelemente siehe (5.70))

$$\begin{aligned} & \langle v_1 v_2, J | \mathcal{V}^{(\kappa)} | v_3 v_4, J \rangle \quad (6.24) \\ &= \sum_{k_1, k_2} \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | \mathcal{Y}^{(\kappa)}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \cdot W^{(k_1, k_2; \kappa)}(\Omega_1, \Omega_2) | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{dir}} \\ &\cdot \int_0^\infty dq q^2 u^{(\kappa)}(q) \int_0^\infty dr_1 R_1(r_1) R_3(r_1) j_{k_1}(qr_1) r_1^2 \int_0^\infty dr_2 R_2(r_2) R_4(r_2) j_{k_2}(qr_2) r_2^2 \\ &- \sum_{k_1, k_2} \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | \mathcal{Y}^{(\kappa)}(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \cdot W^{(k_1, k_2; \kappa)}(\Omega_1, \Omega_2) | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{ex}} \\ &\cdot \int_0^\infty dq q^2 u^{(\kappa)}(q) \int_0^\infty dr_1 R_1(r_1) R_4(r_1) j_{k_1}(qr_1) r_1^2 \int_0^\infty dr_2 R_2(r_2) R_3(r_2) j_{k_2}(qr_2) r_2^2 \end{aligned}$$

wobei sich die TDA-Matrizen strukturell nicht von den nur in der RPA auftretenden B-Matrizen unterscheiden. Die in der Teilchen-Loch-RPA benötigten Wechselwirkungsmatrizen lauten im gleichen Formalismus

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1 v_2^{-1}, J | v^{(\kappa)} | v_3 v_4^{-1}, J \rangle \\
 &= \sum_{k_1, k_2} \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 (\frac{1}{2} \ell_2 j_2)^{-1}, J | j^{(\kappa)} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \cdot W^{(k_1, k_2; \kappa)}(\Omega_1, \Omega_2) | \frac{1}{2} \ell_3 j_3 (\frac{1}{2} \ell_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\
 & \quad \cdot \int_0^\infty dq q^2 u^{(\kappa)}(q) \int_0^\infty dr_1 R_1(r_1) R_2(r_1) j_{k_1}(qr_1) r_1^2 \int_0^\infty dr_2 R_3(r_2) R_4(r_2) j_{k_2}(qr_2) r_2^2 \\
 & - \sum_{k_1, k_2} \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 (\frac{1}{2} \ell_2 j_2)^{-1}, J | j^{(\kappa)} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \cdot W^{(k_1, k_2; \kappa)}(\Omega_1, \Omega_2) | \frac{1}{2} \ell_3 j_3 (\frac{1}{2} \ell_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} \\
 & \quad \cdot \int_0^\infty dq q^2 u^{(\kappa)}(q) \int_0^\infty dr_1 R_1(r_1) R_3(r_1) j_{k_1}(qr_1) r_1^2 \int_0^\infty dr_2 R_2(r_2) R_4(r_2) j_{k_2}(qr_2) r_2^2
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

In diesem Fall nun unterscheiden sich die TDA-Matrizen von den B-Matrizen strukturell; bezeichne in (6.25) für den Augenblick 3 einen Teilchen- und 4 einen Lochzustand, so ist (6.25) eine TDA-Matrix, die entsprechende B-Matrix erhält man durch Vertauschen der Indizes 3 und 4. Analog der graphischen Darstellung der entsprechenden Wechselwirkungsprozesse bezeichnet man die TDA-Matrizen im Teilchen-Loch-Fall auch als "vorwärtslaufend" (f), die B-Matrizen hingegen als "rückwärtslaufend" (b).

Der Vergleich der Formeln zeigt, daß der Radialanteil des direkten Zweiteilchen-Matrixelements in (6.24) von der gleichen Struktur ist wie der Radialanteil des Austauschmatrixelements des "vorwärtslaufenden" Teilchen-Loch-Matrixelements in (6.25). Das gleiche gilt bezüglich der Struktur des Radialanteils des Zweiteilchen-Austauschmatrixelements in (6.24) und der des Radialanteils des Austauschmatrixelements des "rückwärtslaufenden" Teilchen-Loch-Matrixelements (6.25). Koppelt man die im Anhang 5 tabellierten Spin-Winkel-Anteile von Teilchen-Loch-Matrixelementen mit Hilfe der im Anhang 4 zusammengestellten Umkopplungsformeln zu denen von Zweiteilchen-Matrixelementen um, so ergibt sich, daß der Spin-Winkel-Anteil des direkten Zweiteilchen-Matrixelements (6.24) dem des "vorwärtslaufenden" Teilchen-Loch-Austauschmatrixelements (6.25) bis auf eine Phase gleicht; ebenso unterscheiden sich der Spin-Winkel-Anteil des Zweiteilchen-Austauschmatrixelements (6.24) von dem des "rückwärts-

laufenden" Teilchen-Loch-Austauschmatrixelemente (6.25) nur um eine Phase. Diese Umkopplungsbeziehungen sind - unter expliziter Berücksichtigung der sog. "Ringphase" (2.28) - im Anhang 5 tabelliert.

Zur Berechnung der Zweiteilchen-Matrixelemente kann man also den Teil der FORTRAN-Subroutinen zur Berechnung von Teilchen-Loch-Austauschmatrixelementen ohne strukturelle Änderungen übernehmen. Natürlich ändert sich die Konfigurationsauswahl und die Prozedur zur Zusammenstellung der RPA-Matrix; auch die nachträgliche Trennung der zu den Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen gehörigen Zustände mußte neu eingeführt werden.

Folgende mehr ins Detail gehende Probleme sind im Anhang 4 behandelt:

1. Im Teilchen-Loch-Fall unterscheiden sich die direkten rückwärtslaufenden von den direkten vorwärtslaufenden höchstens um eine Phase.
2. Die detaillierte Struktur von Tensor-Wechselwirkungen und die Symmetrierelationen, die man zur Berechnung einiger Anteile der entsprechenden Matrixelemente ausnutzt.
3. Die "Bahndrehimpulsauswahlregeln", die die in (5.33) bzw. (5.53) auftretenden Summationen auf endlich viele Terme beschränken (für direkte Teilchen-Loch-Matrixelemente ist dies wegen der in den Spin-Winkel-Anteilen auftretenden Kroneckersymbole nicht relevant).
4. Die Isospinstruktur der Matrixelemente.

6.2.2 Radialintegration mit dem Horie-Sasaki-Verfahren ("II") (Kle82b)

Die Radialwellenfunktionen in den Matrixelementen (6.24) und (6.25) sind durch (3.3) definiert. Zunächst werden die Oszillatorfunktionen $x_{m\ell}(x)$ in eine passendere Form gebracht. Gemäß (AS72,eq.(22.3.9)) gilt für das verallgemeinerte Laguerre-Polynom

$$L_{m-1}^{\ell+1}(x^2) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-x^2)^\mu}{\mu!} \binom{m+\ell-1/2}{m-\mu-1}$$

und mit der Beziehung für Binomial-Koeffizienten (AS72,eq.(6.1.21))

$$\binom{z}{m} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(m+1) \Gamma(z-m+1)}$$

ergibt sich

$$L_{m-1}^{l+1}(x^2) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-x^2)^\mu}{\mu!} \frac{\Gamma(l+m+1/2)}{\Gamma(\mu+l+1/2) \Gamma(m-\mu)}$$

Mit Hilfe folgender beider Relationen für die Γ -Funktionen:

$$\Gamma(z+1) = z! \quad (\text{AS72, eq. (6.1.5)})$$

$$\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} (2z-1)!! \quad (\text{AS72, eq. (6.1.8), (6.1.12)})$$

(wobei Doppelfakultäten durch die Fußnote #4 in (AS72, p.258) definiert sind)
kann man diesen Ausdruck so umformulieren:

$$L_{m-1}^{l+1/2}(x^2) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(-x^2)^\mu}{\mu!} \frac{\Gamma(l+m+1/2) 2^{\mu+l+1}}{\sqrt{\pi} (2\mu+2l+1)!! (m-\mu)!} \quad (6.26)$$

oder mit einer Indexttransformation ("for numerical convenience in FORTRAN IV") $m \rightarrow m-1$, $\mu \rightarrow \mu+1$

$$L_m^{l+1/2}(x^2) = \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-x^2)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \frac{\Gamma(l+m+3/2) 2^{\mu+l}}{\sqrt{\pi} (2\mu+2l-1)!! (m-\mu+1)!} \quad (6.27)$$

Für die Oszillatorwellenfunktion (3.3b) gilt somit

$$\chi_{m+1, l}(x) = \sqrt{\frac{2(m+1)!}{b^3 \Gamma(l+m+3/2)}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(-x^2)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \frac{\Gamma(l+m+3/2) 2^{\mu+l}}{\sqrt{\pi} (2\mu+2l-1)!! (m-\mu+1)!}$$

$$\chi_{m+1, l}(x) = \sqrt{\frac{2(m+1)! \sqrt{\pi} (2m+2l+1)!!}{b^3 2^{m+l+1}}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{(m+1)!}{(\mu-1)! (m-\mu+1)!} \frac{2^{l+1} (-2x^2)^{\mu-1}}{\sqrt{\pi} (2\mu+2l-1)!!}$$

$$\chi_{m+1, l}(x) = \frac{1}{b^{3/2}} \sqrt{\frac{2^{l+2}}{\sqrt{\pi}}} \sqrt{\frac{(2m+2l+1)!!}{2^{m+1} (m+1)! \sqrt{\pi}}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\mu=1}^{m+1} \binom{m+1}{\mu-1} \frac{(-2x^2)^{\mu-1}}{(2\mu+2l-1)!!} \quad (6.28)$$

Zur Berechnung der Radialintegrale in den Matrixelementen (6.24), (6.25) führe ich folgende Transformation

$$R_a(x) := b^{3/2} R_a(bx) \quad (6.29)$$

auf die dimensionslose Größe $x = r/b$ durch; damit ergibt sich

$$\int dr R_a(r) R_b(r) j_k(qr) r^2 = \int dx R_a(x) R_b(x) j_k(qbx) x^2 \quad (6.30)$$

und wegen des Faktors $b^{-3/2}$ in (6.28) hängt $R_a(x)$ von der Oszillatorkonstante b nicht mehr ab. Für die Blomqvist-Wahlborn-Funktion (3.3) gilt mit (6.28) und (6.30)

$$\mathcal{P}_{uej}(x) = \sum_{l=1}^M c_{uej}^{(l)} \chi_{le}(x)$$

$$\mathcal{P}_{uej}(x) = \sum_{l=1}^M c_{uej}^{(l)} \sqrt{\frac{2^{l+2}}{\sqrt{\pi}}} \sqrt{\frac{(2l+2l-1)!!}{2^l l!}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\mu=1}^l \binom{l}{\mu-1} \frac{(-2x^2)^{\mu-1}}{(2\mu+2l-1)!!}$$

Mit der Summentransformation

$$\sum_{l=1}^M \sum_{\mu=1}^l = \sum_{\mu=1}^M \sum_{l=\mu}^M \quad (6.31)$$

(ebenfalls "for numerical convenience") ergibt sich

$$\mathcal{P}_{uej}(x) = \sqrt{\frac{2^{l+2}}{\sqrt{\pi}}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-2x^2)^{\mu-1}}{(2\mu+2l-1)!!} \sum_{l=\mu}^M \binom{l}{\mu-1} c_{uej}^{(l)} \sqrt{\frac{(2l+2l-1)!!}{2^l l!}}$$

Mit der Notation

$$d_{uejM}^{(\mu-1)} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(2\mu+2l-1)!!} \sum_{l=\mu}^M \binom{l}{\mu-1} c_{uej}^{(l)} \sqrt{\frac{(2l+2l-1)!!}{2^l l!}} \quad (6.33)$$

nimmt (6.32) folgende Form an:

$$\mathcal{P}_{uej}(x) = \sqrt{\frac{2^{l+2}}{\sqrt{\pi}}} x^l e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\mu=1}^M (2x^2)^{\mu-1} d_{uejM}^{(\mu-1)} \quad (6.34)$$

Für das Produkt zweier Polynome

$$\sum_{\mu=1}^m a_{\mu-1} x^{\mu-1}, \quad \sum_{\mu'=1}^{m'} b_{\mu'-1} x^{\mu'-1}$$

gilt nun

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m a_{\mu-1} x^{\mu-1} \sum_{\mu'=1}^{m'} b_{\mu'-1} x^{\mu'-1} &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{\mu'=1}^{m'} a_{\mu-1} b_{\mu'-1} x^{\mu+\mu'-2} \\ &= \sum_{\nu=0}^{m+m'-1} \sum_{\nu'=0}^{\nu} a_{\nu'} b_{\nu-\nu'} x^{\nu+\nu'} \end{aligned}$$

$$\sum_{\mu=1}^n a_{\mu-1} x^{\mu-1} \sum_{\mu'=1}^{n'} b_{\mu'-1} x^{\mu'-1} = \sum_{S=\sigma}^{n+n'-2} x^S \sum_{r=-g(n'-1, S)}^{g(n-1, S)} a_{\frac{S+r}{2}} b_{\frac{S-r}{2}} \quad (6.35a)$$

mit

$$S = \nu + \nu' = \mu + \mu' - 2 \quad (6.35b)$$

$$r = \nu - \nu' = \mu - \mu' \quad (6.35c)$$

$$g(n, s) = \begin{cases} s & |s| \leq n \\ 2n-s & |s| \geq n \end{cases} \quad (6.35d)$$

wie man sich am besten anhand von Figur 3 (Kle82b) klarmacht;

$$\sum_r \Delta r = 2$$

bedeutet, daß der Summationsindex r die ganzen Zahlen in Schritten von 2 durchläuft. Mit Hilfe dieser Relation kann das Produkt zweier Blomqvist-Wahlborn-Funktionen (6.34) in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathcal{I}_{\mu \ell j}(x) \mathcal{I}_{\mu' \ell' j'}(x) = \sqrt{\frac{2^{\ell+\ell'+4}}{\pi}} x^{\ell+\ell'} e^{-x^2} \sum_{S=\sigma}^{n+n'-2} 2^S x^{2S} \sum_{r=-g(n'-1, S)}^{g(n-1, S)} d_{\mu \ell j \mu}^{(\frac{S+r}{2})} d_{\mu' \ell' j' \mu'}^{(\frac{S-r}{2})} \quad (6.36)$$

Für die innerste Summe in (6.36) wird ab nun folgende Notation verwendet:

$$t_{\mu \ell j \mu, \mu' \ell' j' \mu'}^{(s)} = \sum_{\substack{\Delta r=2 \\ r=-g(n'-1, s)}}^{g(n-1, s)} d_{\mu \ell j \mu}^{(\frac{s+r}{2})} d_{\mu' \ell' j' \mu'}^{(\frac{s-r}{2})} \quad (6.37)$$

Diese Matrix ist übrigens symmetrisch:

$$t_{a \mu_a, b \mu_b}^{(s)} = \sum_{\substack{\Delta r=2 \\ r=-g(n_b-1, s)}}^{g(n_a-1, s)} d_{a \mu_a}^{(\frac{s+r}{2})} d_{b \mu_b}^{(\frac{s-r}{2})} \stackrel{[r \rightarrow -r]}{=} \sum_{\substack{\Delta r=2 \\ r=-g(n_a-1, s)}}^{g(n_b-1, s)} d_{b \mu_b}^{(\frac{s+r}{2})} d_{a \mu_a}^{(\frac{s-r}{2})} = t_{b \mu_b, a \mu_a}^{(s)} \quad (6.38)$$

wovon natürlich bei der Berechnung Gebrauch gemacht wird. Der Clou des Verfahrens besteht nun darin, daß folgendes Integral analytisch berechenbar ist (HS61)

$$\int_0^{\infty} e^{-y-r^2} j_k(qr) r^{k+2} dr = \frac{(m+k+1)!!}{(2k+1)!!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{q^2}{2}\right)^{k/2}}{\sqrt{-y}^{k+3}} e^{-\frac{q^2}{4y}} y^{(m-k)/2, k} \left(\frac{q^2}{4y}\right) \quad (6.39a)$$

wobei

$$V_{ne}(s) = \sum_{\mu=\sigma}^n \binom{n}{\mu} \frac{(2\ell+1)!!}{(2\mu+2\ell+1)!!} (-2s)^{\mu} \quad (6.39b)$$

das assoziierte Laguerre-Polynom und

$$m-k \geq 0 \quad (6.39c)$$

geradzahlig ist. Zur Berechnung der Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} j_k(qbx) x^{2s+\ell+\ell'+2} dx \quad (6.40)$$

wird folgende Substitution gewählt:

$$q = \frac{p}{\mu} \quad (6.40a)$$

wobei μ die inverse Comptonwellenlänge ist; mit

$$B = \mu b \quad (6.40b)$$

gilt daher

$$qb = pB \quad (6.40c)$$

und somit

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{uej}(k) \mathcal{R}_{ue'j'}(x) j_k(p\beta x) x^2 dx \\ &= \sqrt{\frac{2^{\ell+\ell'+4}}{\pi}} \sum_{s=\sigma}^{M+M'-2} 2^s t_{uejM, u'e'j'M'}^{(s)} \int_0^{\infty} e^{-x^2} j_k(p\beta x) x^{2s+\ell+\ell'+2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2^{\ell+\ell'+4}}{\pi}} \sum_{s=\sigma}^{M+M'-2} 2^s t_{uejM, u'e'j'M'}^{(s)} \cdot \frac{(2s+\ell+\ell'+k+1)!!}{(2\mu+2\ell+1)!!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\beta^2 p^2}{2}\right)^{k/2}}{\sqrt{-y}^{k+3}} e^{-\frac{\beta^2 p^2}{4}} y^{(m-k)/2, k} \left(\frac{\beta^2 p^2}{4}\right)^{\mu} \\ & \quad \cdot \sum_{\mu=\sigma}^{\frac{2s+\ell+\ell'-k}{2}} \binom{\frac{2s+\ell+\ell'-k}{2}}{\mu} (-1)^{\mu} 2^{-\frac{2\mu+k}{2}} \frac{(\beta p)^{2\mu+k}}{(2\mu+2\ell+1)!!} \quad (6.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{uej}(k) \mathcal{R}_{ue'j'}(x) j_k(p\beta x) x^2 dx \\ &= e^{-\frac{\beta^2 p^2}{4}} \sum_{s=\sigma}^{M+M'-2} t_{uejM, u'e'j'M'}^{(s)} (2s+\ell+\ell'+k+1)!! \sum_{\mu=\sigma}^{\frac{2s+\ell+\ell'-k}{2}} \binom{\frac{2s+\ell+\ell'-k}{2}}{\mu} (-1)^{\mu} 2^{-\frac{2\mu+k}{2}} \frac{(\beta p)^{2\mu+k}}{(2\mu+2\ell+1)!!} \end{aligned}$$

Nun sind wir endlich in der Lage, die Berechnung der in (6.24), (6.25) auftretenden Matrixelemente durchzuführen. Mit der Bezeichnung

$$\bar{v}^{(\kappa)}(p^2) \equiv \mu^{+3} u^{(\kappa)}(q) \quad (6.42)$$

(tatsächlich hängen alle $u^{(\kappa)}(q)$, die in dieser Arbeit vorkommen, sogar die in (5.53), von q^2 ab, nicht lediglich von q) gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \bar{v}^{(\kappa)}(p) p^2 dp \int_0^\infty R_a(x_1) R_b(x_1) j_{k_a}(\beta x_1) x_1^2 dx_1 \int_0^\infty R_c(x_2) R_d(x_2) j_{k_c}(\beta x_2) x_2^2 dx_2 \\ &= \sum_{S_1=\sigma}^{M_a+M_b-2} t_{k_a l_a j_a M_a, k_b l_b j_b M_b}^{(S_1)} \sum_{S_2=\sigma}^{M_c+M_d-2} t_{k_c l_c j_c M_c, k_d l_d j_d M_d}^{(S_2)} \\ & \cdot \sum_{S=\sigma}^{(2S_1+2S_2+l_a+l_b+l_c+l_d)/2} (-1)^S \sum_{\substack{4\gamma=2 \\ r=-q((2S_2+l_c+l_d-k_2)/2, S)}}^{q((2S_1+l_a+l_b-k_1)/2, S)} \left(\frac{\frac{2S_1+l_a+l_b-k_1}{2}}{\frac{S+\gamma}{2}} \right) \left(\frac{\frac{2S_2+l_c+l_d-k_2}{2}}{\frac{S-\gamma}{2}} \right) \\ & \cdot \frac{(2S_1+l_a+l_b+k_1+1)!! (2S_2+l_c+l_d+k_2+1)!!}{(2k_1+S_1+\sigma+1)!! (2k_2+S-\sigma+1)!!} \left(\frac{\beta^2}{2} \right)^{\frac{2S+k_1+k_2}{2}} \int_0^\infty \bar{v}^{(\kappa)}(p^2) (p^2)^{S+\frac{k_1+k_2}{2}+1} e^{-\frac{\beta^2 p^2}{2}} dp \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die Integration über p muß numerisch durchgeführt werden. Dies ist mit dem auch zur Radialintegration bei Deltafunktions-Wechselwirkungsmatrixelementen angewandten (modifizierten) Gauß-Hermite-Verfahren möglich*. Zu diesem Zweck substituieren wir

$$z = \frac{\beta^2 p^2}{2} = \frac{q^2 b^2}{2} \quad (6.44a)$$

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2}\beta} \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad (\leftrightarrow dq = \frac{1}{\sqrt{2}b} \frac{dz}{\sqrt{z}}) \quad (6.44b)$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

* Für diesen Fall wird eine Formel mit 68 Gaußpunkten den Tafeln (SS66) entnommen.

$$\bar{s} = s + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (6.45)$$

gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^{\bar{s}} \int_0^\infty \bar{v}^{(k)}(p^2) (p^2)^{\frac{(2\bar{s}+2)/2 - \beta^2 p^2}{2}} d\rho \\ = \left(\frac{\beta^2}{2}\right)^{\bar{s}} \int_0^\infty \bar{v}^{(k)}\left(\frac{z^2}{\beta^2}\right) \left(\frac{z^2}{\beta^2}\right)^{\bar{s}+1} z^{\bar{s}+1} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{2}\beta\sqrt{z}} \end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\frac{\beta^2}{2}\right)^{\frac{2s+k_1+k_2}{2}} \int_0^\infty \bar{v}^{(k)}(p^2) (p^2)^{\frac{2s+k_1+k_2}{2}+1} e^{-\frac{(\beta p)^2}{2}} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{\beta^3} \int_0^\infty \bar{v}^{(k)}\left(\frac{z^2}{\beta^2}\right) z^{s+\frac{k_1+k_2}{2}+1} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad (6.46)$$

Im Fall des OPEP (5.33) gilt - ohne Formfaktor -

$$\bar{v}^{(0)}\left(\frac{z^2}{\beta_\pi^2}\right) = \mu^3 \frac{1}{2\pi^2} \frac{\mu^2 z^2}{\frac{z^2}{\beta_\pi^2} \mu_\pi^2 + \mu^2} = \frac{\mu_\pi^3}{2\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{\beta_\pi^2}} \quad (6.47)$$

(da ein Faktor 4π noch in den Spin-Winkel-Anteil einbezogen wird - s.o.). Das Computerprogramm ist allerdings nicht auf ein spezielles Meson hin konzipiert und geht für Zentralpotentiale von einem Yukawapotential

$$V_Y(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}$$

aus, welches sich vom Zentralanteil des OPEP um den Faktor $\frac{4\pi}{\mu^3}$ unterscheidet; die (6.47) programmintern entsprechende Größe lautet daher:

$$\bar{v}_{\text{cen}}^{(0)}\left(\frac{z^2}{\beta_\pi^2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{\beta_\pi^2}} \quad (6.48)$$

Entsprechend gilt

$$\bar{v}_{\text{cen}}^{(2)} = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{z^2}{\beta_\pi^2}}{1 + \frac{z^2}{\beta_\pi^2}} \quad (6.49)$$

Trotz $\mu \rightarrow 0$ ist die Transformation auf z auch im Coulombfall möglich (s.(6.44a)); statt (6.48) empfiehlt sich aber dann die Schreibweise

$$\bar{v}_{\text{cen}}^{(0)} = \frac{2\beta_\pi^2}{\pi} \frac{1}{\beta_\pi^2 + z^2} \quad (6.50)$$

Wegen

$$V_e(r) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\mu V_\gamma(r)) \frac{e^2}{r}$$

erhält man, wiederum "programmintern", bei der Ausführung des Integrals (6.46) (mit (6.48)) statt eines Vorfaktors $\frac{\sqrt{8}}{\pi\beta^3}$ einen Vorfaktor $\frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{e^2}{b\gamma}$.

6.3 Testprozeduren für das Computerprogramm zur Berechnung der Matrixelemente

Die numerisch berechneten Matrixelemente wurden gründlichen Tests unterzogen:

- (a) Im Grenzfall großer Mesonenmasse gehen Yukawa-Zentralpotentiale in (noch zu normierende) Deltafunktionspotentiale über. Mit einem Testprogramm wurde die Differenz der Matrizen für Yukawa-Zentralpotentiale und Delta-potentiale ermittelt und ausgedruckt. Die Übereinstimmung war (für beliebige Kombinationen von Spins und Paritäten) im Grenzfall großer Mesonenmassen nie schlechter als 1ppm (vor der Multiplikation mit den Stärkeparametern). Mit einigen Tricks ist diese Prozedur auch auf Austauschmatrixelemente und auf rückwärtslaufende anwendbar. Dies ist auch als numerischer Test des Horie-Sasaki-Verfahrens anzusehen, welches wegen der auftretenden Summationen über (Doppel-)Fakultäten mit vierfacher Genauigkeit arbeiten muß.
- (b) Für Tensorpotentiale war ein entsprechender Test nicht möglich (dies würde die Programmierung eines Skyrme-Tensorpotentials erfordern). In diesem Fall wurde die Umkopplung vom Teilchen-Loch-Fall zum Zweiteilchenfall einmal mit den im Anhang 5 angegebenen Umkopplungsphasen, zum anderen explizite über die im Anhang 4 (A4.1,5) angegebenen Umkopplungsrelationen durchgeführt und anschließend wurden die Matrixelemente ähnlich wie unter (a) verglichen. Die Übereinstimmung war nie schlechter als 2ppm.
- (c) Die Zweiteilchen-TDA konnte mit einem von V. Klemt (u.a.) für Migdalkräfte entwickelten Programm getestet werden. Hier erst stellte sich heraus, daß ich die Normierungsfaktoren (A2.15) in den Zweiteilchenmatrixelementen vergessen hatte, nach deren Einfügung war die Übereinstimmung komplett. (Dies ist ein Test nicht nur für die Matrixelemente, sondern auch für den Programmteil zur Lösung der Gleichungen.)

Fehler könnten also, soweit ich sehe, höchstens noch in den B-Matrizen, also in der RPA-Struktur, versteckt sein.

- (d) Diese Fehlermöglichkeit konnte mindestens teilweise durch die Berechnung der von S. Drozd benötigten Matrixelemente (s. Kap. 0), die den für die RPA benötigten strukturell ähneln, ausgeräumt werden. (S. Drozd und J. Wambach haben einen numerischen Vergleich mit einem von J. Wambach entwickelten Computerprogramm zur Berechnung dieser Matrixelemente für δ -Funktionswechselwirkungen durchgeführt und fanden Übereinstimmung.)

III. Die Resultate und ihre Interpretation

Der relevante Teil der berechneten Kernspektren ist in den Figuren 5 bis 15 graphisch dargestellt. Detailliertere Informationen zu einigen dieser Berechnungen, wie insbesondere zu den X- und Y-Amplituden, sind in den Tabellen 10 und 11 zusammengestellt.

7.

Die ersten drei Abschnitte dieses Kapitels behandeln (ausschließlich) die Resultate für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne, der vierte die für die Teilchen-Loch-Isobare. Der fünfte Abschnitt faßt die Schlußfolgerungen noch einmal zusammen.

7.1 Die Problematik des Ansatzes für die effektive Wechselwirkung

Die unterschiedlichen Konzepte für effektive NN-Wechselwirkungen zum Zweck von Kernstrukturuntersuchungen sind bereits im einleitenden Abschnitt des fünften Kapitels vorgestellt worden. Rein phänomenologische Wechselwirkungsansätze sind zur Berechnung der Kernspektren zum gegenwärtigen Zeitpunkt bereits "voll ausgereizt" - die Studie von Isakov et al. stelle eine (bezeichnende) Ausnahme dar. Deshalb war für diese Diplomarbeit an die Verwendung der " $\pi+p+\delta$ "-Wechselwirkung von Speth et al. (SKW80) gedacht. Im folgenden Abschnitt wird erläutert, wieso dieser in anderem Zusammenhang so erfolgreiche Ansatz für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne ungeeignet ist. Im Anschluß werden problemangepaßtere Konzepte diskutiert.

7.1.1 δ -Funktionswechselwirkungen und $(\pi+p)$ -Austauschwechselwirkungen

Schlichte dichteunabhängige attraktive δ -Wechselwirkungen geben die beobachteten Kernspektren der gg-Kerne (^{210}Po , ^{210}Pb , ^{206}Pb) qualitativ schon recht gut wieder. Eine kurze Reichweite der NN-Wechselwirkung vorausgesetzt, ist dies leicht einzusehen, wenn man annimmt, daß der Einfluß energetisch höherliegen-

der Schalenmodellkonfigurationen auf die Aufspaltung des tiefstliegenden durch die Restwechselwirkung gering ist. Wie deShalit und Feshbach (dSF74, Ch.V) demonstrieren, hebt eine attraktive δ -Restwechselwirkung für eine Schalenmodellkonfiguration mit Kernspin $9/2$ der identischen Nukleonen $[(1h_{9/2})^2]$ ist in ^{210}Po , $(2g_{9/2})^2$ in ^{210}Pb die tiefstliegende Schalenmodellkonfiguration] die Entartung genau in der beobachteten Weise auf: der 0^+ -Zustand wird am stärksten abgesenkt, der 2^+ -Zustand stärker als der 4^+ -Zustand, dieser stärker als der 6^+ - und jener stärker als der 8^+ -Zustand. Für die uu-Kerne ist eine dichteunabhängige δ -Kraft nicht so erfolgreich, eine Migdalwechselwirkung reproduziert aber das Spektrum mindestens von ^{210}Bi schon ganz befriedigend (BBG67); etwa die Tatsache, daß der Grundzustand ein 1^- , der erste angeregte ein 0^- -Zustand ist und nicht umgekehrt, wie in fast allen anderen Rechnungen.

Der Erfolg des Migdalschen Wechselwirkungsansatzes für die Berechnung der Kernspektren von Teilchen-Loch-Kernen steht ganz außer Zweifel (SWW77), (ERW78). Wie eine Inspektion der Formel für E_{1234} im Anhang 5 zeigt, werden Zustände unnatürlicher Parität ($\pi+J$ ungeradzahlig) durch den spinunabhängigen Teil dieser Wechselwirkung nicht beeinflusst. Ein Blick auf das $\pi(+p)$ -Potential zeigt nun, daß der direkte Anteil der $\pi(+p)$ -Zentralwechselwirkung gerade im sog. " $\sigma\tau$ -Kanal" ($\sim \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \vec{t} \cdot \vec{t}'$) wirkt. Für Zustände unnatürlicher Parität in Teilchen-Loch-Kernen ist deshalb anzunehmen, daß ein entscheidender Beitrag zur Wechselwirkung vom $(\pi+p)$ -Austausch herrührt (B²OW77), und dies ist tatsächlich der Fall (SKW80).

Für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne ist die Sachlage aber eine ganz andere. Wegen der "Pauliprinzip-Summenregeln" (Kap. 5.4) sind, im gängigen Jargon formuliert, "alle Kanäle gekoppelt". Dem $\sigma\tau$ -Kanal, und somit dem $(\pi+p)$ -Austausch, kommt daher keine so prominente Rolle zu wie im Fall der Zustände unnatürlicher Parität in Teilchen-Loch-Kernen. Es liegt daher die von mir a posteriori verifizierte Annahme nahe, daß die Einführung eines $(\pi+p)$ -Potentials zusätzlich zu einem δ -Anteil* nichts verbessert, zumal sich die Zahl freier Parameter (eigentlich) nicht erhöht.

* Zur "Philosophie" des δ -Anteils in einer " $\pi+\delta$ "-Wechselwirkung siehe (B²OW77), (SKW80).

Es kam aber sogar noch schlimmer: die Grundzustände der sechs betrachteten Kerne ließen sich mit der $(\pi+p+\delta)$ -Wechselwirkung nach (SKW80) wesentlich schlechter reproduzieren als mit δ -Wechselwirkungen allein; die $(\pi+p)$ -Wechselwirkung nach (SKW80) erwies sich als so attraktiv, daß ohne stark repulsiven δ -Anteil die 0^+ -Zustände in den gg-Kernen gar nicht berechnet werden konnten (Verletzung der Stabilitätsbedingung). In dieser Situation, und in Unkenntnis der eben dargelegten Gründen für die Ungeeignetheit einer $(\pi+p+\delta)$ -Wechselwirkung für die hier betrachteten Kerne, entschied ich mich für eine Verwendung der "verbesserten" $(\pi+p)$ -G-Matrix-Wechselwirkung nach Weise (Wei77), (B²OW77) in der nicht unbegründeten Erwartung, daß diese nicht so stark attraktiv sein würde. Dies erwies sich in der Tat als zutreffend (siehe Figuren 5 bis 15); qualitativ ähneln die Resultate mit dieser Wechselwirkung ($G_{\pi+p}$) - ohne δ -Anteil - hinsichtlich der Spektren zumindestens der gg-Kerne denen von Kuo und Herling mit ihrer G-Matrix-Wechselwirkung. Hinsichtlich der Amplituden ergibt die $G_{\pi+p}$ -Wechselwirkung immer wesentlich reinere Konfigurationen. Ein Fit mit einer zusätzlichen δ -Wechselwirkung erbrachte allerdings keine Verbesserung der Resultate. Diskussionen mit K. Nakayama hatten mir zwischenzeitlich eine Benutzung seiner OBE-G-Matrixwechselwirkungen ermöglicht (der Aufwand zu deren Integrations-Computerprogramm war wesentlich geringer als für die $G_{\pi+p}$ -Wechselwirkung!) und ferner meine Aufmerksamkeit auf die Art der Dichteabhängigkeit effektiver NN-Wechselwirkungen gelenkt.

7.1.2 Dichteabhängigkeit effektiver NN-Wechselwirkungen für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne und die OBE-G-Matrixwechselwirkungen

Berechnet man die Energien der Grundzustände der sechs in Frage stehenden Kerne mit einer gegebenen dichteunabhängigen Wechselwirkung, so fällt auf, daß diejenigen der Zweilochkerne relativ zu denen der konjugierten Zweiteilchenkerne und in bezug auf die jeweiligen experimentellen Grundzustandsenergien immer um einige hundert keV tiefer liegen. Für $G_{\pi+p}$ ist dies etwa in der Tabelle 8 dokumentiert. Für dichteabhängige Schalenmodellpotentiale gilt dies in gleicher Weise, wie die Arbeit von Isakov et al. (IAS77) zeigt - frühere Untersuchungen geben nur Energien in bezug auf den berechneten Grundzustand an, was nicht gerechtfertigt erscheint, da ja auch die Grundzustände formal als angeregte Zustände des doppelt-magischen Kerns behandelt werden (siehe Kap. 1.3).

Diese Beobachtung läßt sich leicht verstehen, wenn man in Betracht zieht, daß in den Schalenmodellgrundzuständen dieser Kerne sich die beiden Valenznukleonen in Unterschalen mit Bahndrehimpulsquantenzahlen $\ell=5$ bzw. $\ell=6$ befinden, die beiden Valenzlöcher jedoch in solchen mit $\ell=0$ bzw. $\ell=1$. Die Bahndrehimpulsabhängigkeit der Radialwellenfunktionen von Einteilchenzuständen ist bekanntlich derart (für den vorliegenden Fall siehe (BW60, Fig.1)), daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchen sich mit steigender Bahndrehimpulsquantenzahl nach außen verlagert. Die effektive Wechselwirkung ist aber am Kernrand stärker als in dessen Zentrum, da wegen der geringeren Dichte weniger intermediäre Streuzustände durch das Pauliprinzip ausgeschlossen werden. Benutzt man nun für Zweiteilchen- und Zweilochkerne die gleiche dichteunabhängige Wechselwirkung, so erhält man natürlich für die Zweiteilchenkerne relativ zu den Zweilochkernen zu geringe Attraktion. Besonders kraß ist der Fall von ^{206}Hg bzw. ^{210}Po mit den tiefstliegenden Schalenmodellkonfigurationen $(3s_{1/2})^{-2}$ bzw. $(1h_{9/2})^2$, da $(1h_{9/2})^2$, im Gegensatz zu $(2g_{9/2})^2$ nur ein einziges Extremum, und dieses bei ~ 6 fm Zentrumsabstand hat; der diskutierte Effekt für die Grundzustandsenergien ist daher hier besonders groß (siehe Tabelle 8 und (IAS77)).

Die in Kap. 5.3 beschriebenen OBE-G-Matrizen sind nun explizit dichteabhängig in dem Sinn, daß $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$ mit $k_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ einer Wechselwirkung im Kerninnern, $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$ mit $k_F = 0.95 \text{ fm}^{-1}$ einer an der Kernoberfläche entspricht. Zwar sind die Teilchen dort nicht exakt lokalisiert - $(2g_{9/2})^2$ hat auch bei Zentrumsabständen von ≤ 3 fm nicht verschwindende Werte - für qualitative Betrachtungen jedoch ist die Verwendung dieser Wechselwirkungen nützlich. Die Figuren 5 bzw. 8 zeigen für ^{210}Po bzw. ^{210}Pb , die Figuren 11 und 12 für ^{210}Bi , daß $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$ für Zweiteilchen-Kerne tatsächlich attraktiver ist als $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$.

Generell sind die OBE-G-Matrizen attraktiver als $G_{\pi+\rho}$, was nicht überrascht, da sie die "intermediate-range attraction" des σ -Mesons enthalten (siehe Kap. 5.0).

7.1.3 "Induzierte Wechselwirkungen" und "Kopplung zu Phononen"

Es wurde schon verschiedentlich betont, daß eine G-Matrix nur einen Teil (wenn auch den überwiegenden) der effektiven NN-Wechselwirkung darstellt, und auf

die Problematik der Konvergenz der entsprechenden Reihenentwicklung hingewiesen. Die zur G-Matrix hinzukommenden Terme können durchaus eine Umordnung der Niveaux bewirken, wie auch generell zusätzliche Attraktion oder Repulsion (KH72), (BK73). Eine Simulation dieser zusätzlichen Terme, der sog. "induzierten Wechselwirkung" durch δ -Wechselwirkungen, ist bei weitem nicht ausreichend, wie anhand der Spektren der gg-Kerne demonstriert wird (Figuren 6 bis 9). Immerhin konnten Nakayama et al. (NKS84), (Nak84) zeigen, daß die induzierte Wechselwirkung im Limes verschwindender Reichweite für die OBE-G-Matrizen repulsiv ist - das geht in die richtige Richtung.

Der viel zu geringe Abstand der beiden ersten angeregten 2^+ -Zustände in ^{206}Pb aber, oder die zu geringe Aufspaltung der $(1h_{9/2})^2$ - und $(2g_{9/2})^2$ -Konfigurationen, insbesondere für $2^+ \leq J^\pi \leq 8^+$, kann durch Näherungen zur induzierten Wechselwirkung mit dichteunabhängigen δ -Wechselwirkungen gar nicht (im Gegenteil), mit dichteabhängigen kaum verbessert werden. Bei induzierten Wechselwirkungen endlicher Reichweite ist dies ganz anders, wie etwa die Arbeiten von Kuo und Herling zeigen. Dies gilt auch bezüglich der beiden erwähnten 2^+ -Zustände in ^{206}Pb (KH71) (die Resultate bezüglich der Zweilochkerne wurden in die Publikation (KH72) bezeichnenderweise nicht aufgenommen). Gerade diese werden aber auch von Ma und True (MT73) im Rahmen eines ganz anderen Konzepts (siehe Kap. 5.0) recht gut reproduziert, so daß nicht klar ist, ob der viel zu geringe Abstand dieser beiden 2^+ -Zustände in den hier präsentierten G-Matrix-Rechnungen eher durch induzierte Wechselwirkungen endlicher Reichweite als durch "Kopplung zu Phononen" verbessert werden könnte.

Mit "Kopplung zu Phononen" (deren Wichtigkeit auch Isakov et al. (IAS82) betonen) meine ich Kopplung mit kollektiven Anregungszuständen des "Core", etwa mit dem ersten angeregten Zustand von ^{208}Pb , dem 3^- -Zustand bei 2.6 MeV. Dieser sollte die 3^- -Zustände in den gg-Kernen stark beeinflussen, und diese liegen ohne die Berücksichtigung dieser Kopplung tatsächlich viel zu hoch (Tabelle 9).

7.2 TDA versus RPA

Die RPA bringt, wie zu erwarten, zusätzliche Attraktion vor allem für die tiefliegenden Zustände. Dieser Effekt ist für die gg-Kerne stärker als für die

uu-Kerne (siehe auch Tabelle 10 bezüglich der Y-Amplituden). Welche von beiden Näherungen "besser" ist, kann hier beim besten Willen nicht entschieden werden, insbesondere da die Verwendung einer bestimmten Näherung zur Kernstruktur angeregter Zustände mit der Struktur des Modells für die induzierte Wechselwirkung eng zusammenhängt ((BK73) bzw. (dSF74, Ch.20)).

Eine geeignete Maßzahl für den Unterschied zwischen TDA und RPA bzw. für die Stärke von Grundzustandskorrelationen ist die sog. Korrelationsenergie (VG71), (RP69). Ring und Schuck (RS80, Ch.8.4.5) geben eine recht einfache Methode zur Berechnung der Absenkung des RPA-Grundzustands durch Teilchen-Loch-Grundzustandskorrelationen an (dies ist eben die "Korrelationsenergie"), die ich auf den Zweiteilchen- bzw. Zweilochfall übertragen konnte (zusätzliche Absenkung aufgrund von Zweiteilchen-Zweiloch-Korrelationen). Aus Zeitmangel habe ich die resultierende Formel hier nicht mehr verwandt, aber die Diskussion wäre wohl analog der in (VG71) verlaufen: (1) je stärker die Wechselwirkung, desto mehr Grundzustandskorrelationen (siehe auch Tabelle 10!); (2) der große Beitrag der Neutron-Protón-Korrelationen ist eine Eigenschaft des Modellraums (hier des gleichen wie in (VG71)); einen größeren zu verwenden, lohnt übrigens kaum, da die Zustände wenig kollektiv sind (Tab. 11)).

7.3 Varia zu einigen Kernspektren

^{210}Po

Man beachte die Stärke der Coulombwechselwirkung (Figur 6)!

^{210}Bi

In Figur 11 (TDA für ^{210}Bi) habe ich zum Vergleich auch Kuo und Herling's Resultate (KH71) für deren G-Matrix-Wechselwirkung eingetragen (im Gegensatz zum Fall der gg-Kerne, wo Kuo und Herling's G-Matrix viel weniger attraktiv ist als Nakayama's OBE-G-Matrizen, sind die Spektren für ^{210}Bi sehr ähnlich).

Der zweite angeregte 1^- liegt bei Kuo und Herling sehr hoch und wird bei Verwendung ihrer induzierten Wechselwirkung stark nach unten gezogen, was Hand in Hand geht mit einer Wandlung von einem fast reinen $2f_{7/2}2g_{9/2}$ -Zustand in einen

mit zu etwa gleichen Teilen gemischten X-Amplituden für $2f_{7/2}2g_{9/2}$ und $1h_{9/2}1i_{13/2}$. Bei meinen (RPA-)Rechnungen konnte ich nun für diesen Zustand beobachten, daß für $G_{\pi+p}$ der 1_2^- (bei 1.58 MeV) ebenfalls ein fast reiner $2f_{7/2}2g_{9/2}$ -Zustand ist, für $G_{OBE}^{(surf)}$ (bei 1.21 MeV liegend) aber schon eine starke Beimischung von $1h_{9/2}1i_{13/2}$ hat. Kuo und Herling's induzierte Wechselwirkung ist attraktiv, $G_{OBE}^{(surf)}$ attraktiver als $G_{\pi+p}$.

Es erscheint mir kein Zufall zu sein, daß für $G_{\pi+p}$ der erste 1^- bereits der zweite angeregte Zustand ist, für $G_{OBE}^{(surf)}$ aber schon nahe am 0^- liegt (welcher sich experimentell ^{nicht} als Grundzustand erweist).

^{206}Tl

Der Zusammenhang zwischen den experimentellen und den berechneten Kernspektren ist hier noch problematischer als anderswo. Dies ist nicht anders zu erwarten; es gibt schlicht keine Rechnungen, die das Spektrum von ^{206}Tl auch nur halbwegs zutreffend beschreiben (MT73).

7.4 Die Teilchen-Loch-Isobare

Wie schon ein Vergleich der Schalenmodell-Teilchen-Loch-Konfigurationen mit den experimentellen Kernspektren zeigt (Figur 14 und 15), ist die effektive Restwechselwirkung für ^{208}Bi und ^{208}Tl zum einen schwach und zum anderen repulsiv. Beides kann man im Rahmen eines Migdalansatzes für die effektive Restwechselwirkung (ERW78) gut verstehen; aufgrund des Verschwindens der entsprechenden Isospinmatrixelemente tragen nur die " τ -Kanäle" ($\sim \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}'$, $\sim \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}'$) zur Wechselwirkung bei und die Parameter f_0' , g_0' sind für alle benutzten Teilchen-Loch-Migdalwechselwirkungen positiv und klein. Mit der kurzen Reichweite der effektiven NN-Wechselwirkung argumentierend erwartet man daher qualitativ, daß im Zweiteilchenfall attraktive Wechselwirkungen in den Teilchen-Loch-Isobaren repulsiv wirken - und zwar umso stärker, je attraktiver die entsprechende Wechselwirkung im Zweiteilchenfall ist. Genau dies bestätigen die Berechnungen - die im Zweiteilchenfall zu wenig attraktive $G_{\pi+p}$ -Wechselwirkung ist für die Teilchen-Loch-Isobare nicht repulsiv genug, die dort attraktivere G_{OBE} -Wechselwirkung (die ja offenbar einen kurzreichweitigen attraktiven Anteil enthält) hier repulsiver.

Bezüglich der Spektren ist der Unterschied zwischen RPA und TDA für die Teilchen-Loch-Isobare minimal (viel geringer als für Zweiteilchen-uu-Kerne). Der Grund hierfür ist die extreme Schwäche der effektiven Restwechselwirkung.

7.5 Schlußfolgerungen

Zur Berechnung der Kernspektren von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen wurden Mesonenaustauschpotentiale anstelle phänomenologischer Ansätze verwendet. Hinsichtlich Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden können die resultierenden Kernspektren nicht mit denen aus phänomenologischen Schalenmodellstudien - etwa (MT73) - konkurrieren. Dies liegt daran, daß die hier verwendeten (im wesentlichen parameterfreien) Mesonaustausch-G-Matrixwechselwirkungen nur einen Teil der effektiven NN-Wechselwirkung darstellen, da sie (Kap. 7.1.3) weder "induzierte" Wechselwirkungen noch "Kopplung zu Phononen" enthalten. Die Resultate lassen immerhin zweierlei erkennen:

- (1) Der $(\pi+p)$ -Austausch spielt für die Zustände in den Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen nicht eine so dominierende Rolle wie für die Zustände un- natürlicher Parität des doppelt-magischen Kerns (wie zu erwarten).
- (2) Die Medium- bzw. Dichteabhängigkeit der effektiven Wechselwirkung.

Die dichteabhängigen OBE-G-Matrixwechselwirkungen sind also dem vorliegenden Problem viel eher angemessen als die dichteunabhängige $(\pi+p)$ -G-Matrixwechselwirkung.

Ein Vergleich von TDA und RPA hinsichtlich der Qualität der Wiedergabe experimenteller Daten war mit den gegebenen Mesonaustausch-G-Matrixwechselwirkungen natürlich ebensowenig möglich wie es nicht sinnvoll gewesen wäre, die in den Amplituden verschlüsselte Information über die Wellenfunktionen etwa zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten zu benutzen.

Für die der Vollständigkeit wegen mitbehandelten Teilchen-Loch-Isobare liefern die Resultate keine neuen Einsichten (Kap. 7.4).

Weiterreichende Schlüsse können aus den vorliegenden Daten m.E. kaum gezogen werden; dazu bedürfte es (u.a.!) besserer OBE-Wechselwirkungen, also neben ei-

ner "echten" Berücksichtigung der Dichteabhängigkeit insbesondere eines "guten" Modells für die induzierte Wechselwirkung - Deltafunktionsapproximation ("Landau-Limes") sind nicht ausreichend.

Anhang 1: Fockraumdarstellung von Ein- und Zweikörperoperatoren mit Hilfe des Wick'schen Theorems

Teilchenerzeugungs- und -vernichtungsoperatoren

Eine N-Fermionenzustandsfunktion $|\alpha\beta\gamma\dots\rangle$, die Fermionen in den Einteilchenzuständen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ beschreibt, kann durch Erzeugungsoperatoren $a_\alpha^+, a_\beta^+, a_\gamma^+, \dots$ dargestellt werden, die auf den physikalischen Vakuumzustand $|-\rangle$ wirken:

$$|\alpha\beta\gamma\dots\rangle = a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma^+ \dots |-\rangle \quad (\text{A1.1})$$

Antisymmetrie und Normierung der N-Fermionenzustandsfunktion erfordern, daß die Erzeugungs- und die adjungierten Vernichtungsoperatoren die folgenden Antikommutatorrelationen erfüllen:

$$\{a_\alpha^+, a_\beta^+\} = 0 \quad (\text{A1.2})$$

$$\{a_\alpha, a_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A1.3})$$

Ein- und Zweikörperoperatoren im Fockraum

In dieser Darstellung hat ein Hamiltonoperator, der eine Zweikörperwechselwirkung enthält, die Form

$$H = \sum_{v,v'} T_{vv'} a_v^+ a_{v'} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu',\nu'} V_{\mu\nu\mu',\nu'} a_\mu^+ a_\nu^+ a_{\nu'} a_{\mu'} \quad (\text{A1.4a})$$

wobei

$$T_{vv'} = \langle v | -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta | v' \rangle \quad (\text{A1.4b})$$

und

$$V_{\mu\nu\mu',\nu'} = \int_a \langle \mu\nu | V | \mu'\nu' \rangle_a \quad (\text{A1.4c})$$

Teilchen- und Lochzustände, Vakuumzustand, Teilchen-Loch-Vakuum

Ist ein Kern der Massenzahl A näherungsweise im Schalenmodellbild beschreibbar, so sind im Grundzustand in guter Näherung nur die A energetischen tiefstliegenden Einteilchenzustände besetzt. Allgemein üblich ist die Bezeichnung

dieser "Lochzustände" mit den Buchstaben i, j und die der im Grundzustand unbesetzten "Teilchenzustände" mit m, n . Man definiert Quasiteilchenoperatoren

$$\alpha_m^+ = a_m^+ \quad (\text{erzeugt ein Teilchen}) \quad (\text{A1.5a})$$

$$\alpha_i^+ = a_i \quad (\text{erzeugt ein Loch}) \quad (\text{A1.5b})$$

Ein Zustand $|\sim\rangle$ wird als Vakuumzustand bzgl. eines Satzes von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_v^+, a_v bezeichnet, falls

$$a_v^+ |\sim\rangle = |\nu\rangle \quad (\text{A1.6a})$$

$$a_v |\sim\rangle = 0 \quad (\text{A1.6b})$$

Beispielsweise ist das physikalische Vakuum $|\rightarrow$ Vakuumzustand in Bezug auf die Teilchenerzeugungs- und -vernichtungsoperatoren. Bezüglich der Quasiteilchenoperatoren (A1.5) ist hingegen das "Teilchen-Loch-Vakuum"

$$|\rightarrow = \prod_{i \in A} a_i^+ |\sim\rangle \quad (\text{A1.7})$$

der Vakuumzustand.

Normalgeordnete Produkte, Kontraktionen

Zu einem Produkt $ABCD\dots$ von Operatoren, die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bzgl. eines Vakuumzustands $|\sim\rangle$ sind, definiert man jedes Produkt dieser Operatoren, in welchem alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren angeordnet sind, mit dem Vorzeichen der Permutation, die zur Herstellung dieser Anordnung nötig ist, als zugeordnetes "normalgeordnetes Produkt": $ABCD\dots$. Beispielsweise ist

$$: a_m a_i^+ a_j a_n^+ : = -a_i^+ a_n^+ a_m a_j$$

normalgeordnet in bezug auf das physikalische Vakuum $|\rightarrow$,

$$: a_m a_i^+ a_j a_n^+ : = : \alpha_m \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_n : = \alpha_j^+ \alpha_n^+ \alpha_m \alpha_i = a_j a_n^+ a_m a_i^+$$

hingegen normalgeordnet bzgl. des Teilchen-Loch-Vakuums $| \sim \rangle$ (A1.7). Aus der Definition folgt insbesondere

$$\langle \sim | : ABCD \dots : | \sim \rangle = 0 \quad (\text{A1.8})$$

Ferner definiert man als Kontraktion zweier Operatoren in einem normalgeordneten Produkt das Produkt des Vakuumerwartungswertes des Produkts dieser beiden Operatoren mit dem normalgeordneten Produkt der restlichen Operatoren und mit dem Vorzeichen der Permutation, die zur Herstellung dieser Anordnung notwendig ist; also beispielsweise

$$: \underbrace{ABCD} \dots : = - \langle \sim | AC | \sim \rangle : BD \dots :$$

$$: \underbrace{ABCD} \underbrace{EFGH} \dots : = \langle \sim | AC | \sim \rangle \langle \sim | BE | \sim \rangle : DF \dots :$$

Wicksches Theorem

Ein Produkt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kann als Summe normalgeordneter Produkte, welche alle möglichen Kontraktionen dieser Operatoren enthalten, dargestellt werden.

Korollar

Die Anwendung des Wickschen Theorems auf das im Ausdruck für die Zweikörperwechselwirkung (A1.4) auftretende Produkt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ergibt für Normalordnung in bezug auf das Teilchen-Loch-Vakuum (A1.7)

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{+} a_{\nu}^{+} a_{\nu} a_{\mu} &= : a_{\mu}^{+} a_{\nu}^{+} a_{\nu} a_{\mu} : \\ &+ \langle | a_{\mu}^{+} a_{\mu} | \rangle : a_{\nu}^{+} a_{\nu} : - \langle | a_{\mu}^{+} a_{\nu} | \rangle : a_{\nu}^{+} a_{\mu} : \\ &+ \langle | a_{\nu}^{+} a_{\nu} | \rangle : a_{\mu}^{+} a_{\mu} : - \langle | a_{\nu}^{+} a_{\mu} | \rangle : a_{\mu}^{+} a_{\nu} : \\ &+ \langle | a_{\mu}^{+} a_{\mu} | \rangle \langle | a_{\nu}^{+} a_{\nu} | \rangle - \langle | a_{\mu}^{+} a_{\nu} | \rangle \langle | a_{\nu}^{+} a_{\mu} | \rangle \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

In (A1.4) eingesetzt ergibt dies bei Benutzung der Antisymmetrie von $V_{\mu\nu\mu'\nu'}$

$$H = \sum_{\nu, \nu'} T_{\nu\nu'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} + \sum_{\mu\nu\mu'} V_{\mu\nu\mu'} \{ \frac{1}{2} \langle |a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}| \rangle \langle |a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}| \rangle + \langle |a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}| \rangle : a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} : + \frac{1}{4} : a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} a_{\mu} : \}$$

Da nach dem Wickschen Theorem trivialerweise

$$a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} : = a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} - \langle |a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}| \rangle$$

kann man diese Darstellung umformen zu

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\nu, \nu'} \{ T_{\nu\nu'} + \sum_{\mu, \mu'} V_{\mu\nu\mu'} \langle |a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}| \rangle \} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\mu'} V_{\mu\nu\mu'} \langle |a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}| \rangle \langle |a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}| \rangle \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'} V_{\mu\nu\mu'} : a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} a_{\mu} : \end{aligned} \quad (A1.10)$$

Anhang 2: Drehimpulskopplung

A2.1 Kopplung von zwei Drehimpulsen (Me61, App.C)

Die Zustände von zwei Quantensystemen mit den Drehimpulsoperatoren \vec{J}_1 und \vec{J}_2 können simultan als Eigenzustände zu \vec{J}_1^2 , \vec{J}_2^2 , J_{1Z} und J_{2Z} gewählt werden. In dieser Darstellung sind sie Tensorprodukte der entsprechenden Zustände $|j_1 m_1\rangle$ und $|j_2 m_2\rangle$ der beiden Quantensysteme

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (A2.1)$$

Ebensogut kann man sie simultan als Eigenzustände zu \vec{J}_1^2 , \vec{J}_2^2 ,

$$\vec{J}^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 \quad (A2.2a)$$

und

$$J_Z = J_{1Z} + J_{2Z} \quad (A2.2b)$$

wählen. Der Übergang zu dieser Darstellung erfolgt durch eine unitäre Transformation

$$|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle |j_1 j_2 J M\rangle \quad (A2.3a)$$

Die Transformationskoeffizienten

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \rangle := \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle \quad (A2.3b)$$

heißen Clebsch-Gordan-Koeffizienten und können reell gewählt werden. Für sie gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{+j_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (A2.4a)$$

$$\sum_{J=-|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{+J} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | J M \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (A2.4b)$$

Häufig benutzt man statt der Clebsch-Gordan-Koeffizienten Wigner's 3j-Symbole

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 -m_3 \rangle \quad (\text{A2.5a})$$

Neben

$$m_1+m_2+m_3=0 \quad (\text{A2.5b})$$

gelten insbesondere die Dreiecksungleichung

$$|j_1-j_2| \leq j_3 \leq j_1+j_2 \quad (\text{A2.5c})$$

sowie folgende Symmetrierelationen: 3j-Symbole sind invariant unter zyklischen Permutationen der drei Spalten, unter antizyklischen ändern sie sich lediglich um eine Phase $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$; letzteres gilt auch bei Umkehrung der Vorzeichen aller drei m-Quantenzahlen.

Für Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt daraus z.B.

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 -m_1 j_2 -m_2 | J-M \rangle \quad (\text{A2.6a})$$

und

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle \quad (\text{A2.6b})$$

Im Fall halbzahlgiger J (die bei der Kopplung von zwei Niveaux mit Spin 1/2 nicht auftreten können) berücksichtigt das Minuszeichen in der Phase $(-1)^{j_1+j_2-J}$, daß sich in (A2.5a) das Vorzeichen umkehrt.

Sind \vec{J}_1 und \vec{J}_2 selbst Gesamtdrehimpulsoperatoren als Summe aus Gesamtdrehimpuls und Spin

$$\vec{J}_r = \vec{L}_r + \vec{S}_r \quad (\text{A2.7})$$

$r = 1, 2$

so sind die Zustände $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ natürlich auch Eigenzustände von \vec{L}_r^2 und \vec{S}_r^2

$$|j_r m_r\rangle = |s_r l_r j_r m_r\rangle \quad (\text{A2.8})$$

A2.2 Lochzustände (Ro70, App.A), (BM79)

Wir betrachten eine mit $(2j+1)$ Teilchen vollbesetzte j -Unterschale, deren Zustand natürlich durch den Drehimpuls $J=0$ gekennzeichnet ist; diesen bezeichnen wir mit $|J=0\rangle$ und einen Zustand, der aus diesem durch Entfernen eines Teilchens entsteht, als Lochzustand $| (jm)^{-1} \rangle$:

$$| (jm)^{-1} \rangle = a_{jm} |J=0\rangle \quad (A2.9)$$

Natürlich gilt

$$\sum_m a_{jm}^+ a_{jm} |J=0\rangle = \sum_m a_{jm}^+ | (jm)^{-1} \rangle \sim |J=0\rangle \quad (A2.10)$$

a_{jm}^+ transformiert sich unter Drehungen wie der Zustand

$$a_{jm}^+ |J=0\rangle = |jm\rangle \quad (A2.11)$$

da $|J=0\rangle$ ein Skalar ist ($Y_0^{(0)} = 1/\sqrt{4\pi}$). Den Zustand $|jm\rangle$ kann man nun nach (A2.3) mit einem anderen Eigenzustand zur gleichen Drehimpulsquantenzahl j nur auf folgende Weise zu einem Zustand mit dem Drehimpuls $J=0$ koppeln:

$$\sum_m \langle jmj-m|00\rangle |jm\rangle |j-m\rangle \sim |J=0\rangle \quad (A2.12a)$$

Da

$$\langle jmj-m|00\rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \quad (A2.12b)$$

ergibt der Vergleich von (A2.12) mit (A2.10), daß sich der Lochzustand $| (jm)^{-1} \rangle$ unter Drehungen wie $(-1)^{j-m} |j-m\rangle$ transformiert. Wir definieren

$$| (jm)^{-1} \rangle := (-1)^{j-m} |j-m\rangle \quad (A2.13)$$

Die Korrektheit dieser Ableitung kann durch Vergleich mit der Phasenkonvention von Bohr und Mottelson überprüft werden. Diese definieren einen Locherzeugungsoperator $b^+(jm)$, der einen Lochzustand erzeugt, der sich wie $|jm\rangle$ transformiert, durch die Vernichtung des zeitumgekehrten Zustands

$$\bar{|jm\rangle} = \mathcal{T}|jm\rangle = (-1)^{j+m} |j-m\rangle \quad (\text{BM79, eq. (1-40)})$$

so:

$$b^+(jm) := \overline{a(jm)} = (-1)^{j+m} a(j-m) \quad (\text{BM79, eq. (3-7)})$$

Da nun umgekehrt

$$a(jm) = -b^+(\overline{jm}) \quad (\text{BM79, eq. (3B-5)})$$

gilt in dieser Notation

$$a(jm) = -(-1)^{j+m} b(j-m) = (-1)^{j-m} b(j-m)$$

für Fermionen (m halbzahlig), d.h. die Vernichtung eines Teilchens in einem Zustand mit der Drehimpulsquantenzahl j und der magnetischen Quantenzahl m entspricht der Erzeugung eines Lochzustands, der sich wie $(-1)^{j-m} |j-m\rangle$ transformiert. Q.E.D.

A2.3 Drehimpulskopplung von Teilchen-Loch- sowie von Zweiteilchen- bzw. Zweilochkonfigurationen

Ist ein Einteilchenniveau durch die Quantenzahlen a gekennzeichnet, so bezeichne ich mit v_a alle Quantenzahlen außer der magnetischen m_a und (oder), wo aus dem Kontext ersichtlich, der Isospinquantenzahl t_a .

Aus der Definition (A2.13) folgt mit der Transformation (A2.3), daß die Kopplung von Teilchen-Loch-Konfigurationen $|v_1 m_1 (v_2 m_2)^{-1}\rangle$ zu einem Eigenzustand des Gesamtdrehimpulses durch

$$|v_1 v_2^{-1}, JM\rangle := \sum_{m_1 m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1 m_1 j_2 - m_2 | JM \rangle |v_1 m_1 (v_2 m_2)^{-1}\rangle \quad (\text{A2.14})$$

gegeben ist; dieser Zustand ist auf 1 normiert. Für die Kopplung von Zweiteilchenkonfigurationen $|v_1 m_1 v_2 m_2\rangle$ legt (A2.3) natürlich die Definition

$$|v_1 v_2, JM\rangle := \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |v_1 m_1 v_2 m_2\rangle$$

nahe, und für die Kopplung von Zweilochkonfigurationen $|v_1^{-1} v_2^{-1}\rangle$ mit der Definition (A2.13)

$$|v_1^{-1}v_2^{-1}, JM\rangle := \sum_{m_1 m_2} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M \rangle |v_1 m_1\rangle^{-1} |v_2 m_2\rangle^{-1}$$

Es zeigt sich aber, daß diese Zustände nicht auf 1 normiert sind; mit Hilfe der Antikommutatorrelationen (A1.2,3) kann man vielmehr nachrechnen, daß

$$|\langle v_1 v_2, JM | v_1 v_2, JM \rangle|^2 = 1 + (-1)^J \delta_{v_1 v_2}$$

$$|\langle v_1^{-1} v_2^{-1}, J - M | v_1^{-1} v_2^{-1}, J - M \rangle|^2 = 1 + (-1)^J \delta_{v_1 v_2}$$

was übrigens zeigt, daß identische Fermionen in der gleichen j -Unterschale nicht zu ungeradem Gesamtdrehimpuls koppeln können. In dieser Arbeit werden die auf 1 normierten Zustände verwendet:

$$|v_1 v_2, JM\rangle := \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{v_1 v_2}}} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |v_1 m_1 v_2 m_2\rangle \quad (A2.15a)$$

$$|v_1^{-1} v_2^{-1}, JM\rangle := \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{v_1 v_2}}} \sum_{m_1 m_2} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M \rangle |v_1 m_1\rangle^{-1} |v_2 m_2\rangle^{-1} \quad (A2.15b)$$

Wegen der Symmetrierelation (A2.6a) gilt übrigens

$$|v_1^{-1} v_2^{-1}, JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{v_1 v_2}}} \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |v_1 m_1\rangle^{-1} |v_2 m_2\rangle^{-1} \quad (A2.15c)$$

d.h. die Kopplung von Zweilochkonfigurationen ist der von Zweiteilchenkonfigurationen formal identisch. Aus der Symmetrierelation (A2.6b) ergibt sich in Verbindung mit den Antikommutatorrelationen (A1.2,3) für die drehimpulsgekoppelten Zweiteilchen- bzw. Zweilochzustände

$$|v_2 v_1, JM\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J + 1} |v_1 v_2, JM\rangle \quad (A2.16a)$$

$$|v_2^{-1} v_1^{-1}, JM\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J + 1} |v_1^{-1} v_2^{-1}, JM\rangle \quad (A2.16b)$$

A2.4 Das Wigner-Eckart-Theorem

Bekanntlich (z.B. (Me61,eq.(125))) gilt für irreduzible Tensoroperatoren $T_q^{(k)}$ - die sich unter Drehungen wie Kugelflächenfunktionen $Y_q^{(k)}$ transformieren - das Wigner-Eckart-Theorem:

$$\langle \alpha' J' M' | T_q^{(k)} | \alpha J M \rangle = \frac{\langle J M k q | J' M' \rangle}{\sqrt{2J'+1}} \langle \alpha' J' || T^{(k)} || \alpha J \rangle \quad (A2.17)$$

Das "reduzierte Matrixelement" $\langle \alpha' J' || T^{(k)} || \alpha J \rangle$ hängt von den magnetischen Quantenzahlen nicht mehr ab. Für dessen Koeffizienten ergibt sich unter Verwendung der Symmetrierelationen für 3j-Symbole, deren Definition (A2.5) und der Tatsache, daß k und somit J und J' ganzzahlig sind:

$$\frac{\langle J M k q | J' M' \rangle}{\sqrt{2J'+1}} = (-1)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & J & k \\ M' & -M & -q \end{pmatrix} \quad (A2.18)$$

Für skalare Operatoren $T_0^{(0)}$ - insbesondere etwa Potentiale - nimmt diese Beziehung mit der Definition (A2.5a) und der Relation (A2.12b) folgende Form an:

$$\frac{\langle J M 0 0 | J' M' \rangle}{\sqrt{2J'+1}} (-1)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & J & 0 \\ M' & -M & 0 \end{pmatrix} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} = \frac{\delta_{JJ'} \delta_{MM'}}{\sqrt{2J'+1}} \quad (A2.19)$$

Das Wigner-Eckart-Theorem kann im Fall skalarer Operatoren daher so definiert werden:

$$\langle \alpha' J' M' | T_0^{(0)} | \alpha J M \rangle = \langle \alpha' J' | T_0^{(0)} | \alpha J \rangle \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (A2.20a)$$

mit

$$\langle \alpha' J' | T_0^{(0)} | \alpha J \rangle = \frac{\langle \alpha' J' || T_0^{(0)} || \alpha J \rangle}{\sqrt{2J+1}} \quad (A2.20b)$$

Statt (A2.18) kann man mit der Definition der 3j-Symbole (A2.5a), der Relation (A2.5b) für die m -Quantenzahlen und der Ganzzahligkeit von J und J' ebensogut

$$\frac{\langle J M k q | J' M' \rangle}{\sqrt{2J'+1}} = \frac{(-1)^{J-M}}{\sqrt{2k+1}} \langle J' M' J-M | k q \rangle \quad (A2.21)$$

schreiben und erhält das Wigner-Eckart-Theorem (A2.17) in der Form

$$\langle \alpha' J' M' | T_q^{(k)} | \alpha J M \rangle = \frac{(-1)^{J-M}}{\sqrt{2k+1}} \langle J' M' J-M | k q \rangle \langle \alpha' J' || T^{(k)} || \alpha J \rangle \quad (A2.22)$$

Anhang 3: Energieskalen

A3.1 "Experimentelle Einteilchenenergien"

Wie gestaltet sich nun praktisch die "direkte Übernahme der Einteilchenenergien vom Experiment"? Die Anregungsenergien der in Frage kommenden tiefliegenden Zustände der vier zu ^{208}Pb gehörigen "Magisch ± 1 -Kerne" ^{209}Pb , ^{207}Pb , ^{209}Bi und ^{207}Tl wurden der "Table of Isotopes" (LS78) entnommen (Tabelle 4). Diese sind natürlich auf den Grundzustand des jeweiligen Kerns bezogen, welcher als der jeweils tiefst- bzw. höchstliegende Zustand der in Figur 2 angedeuteten ersten Oszillatorschalen oberhalb bzw. unterhalb der Fermikanten zu identifizieren ist. Zur Umrechnung auf das Nullniveau des HF-Potentials benötigt man (wie anhand Figur 2 ersichtlich) die Separationsenergie des Nukleons im für den Grundzustand des jeweiligen Magisch $+1$ -Kerns besetzten Teilchenzustand sowie die Separationsenergien für beide Nukleonensorten im doppelt-magischen Kern. Diese Separationsenergien sind über die Bindungsenergien der fünf genannten Kerne zu berechnen, welche in der "Atomic Mass Table" (WB77) wie folgt definiert werden:

$$M(A', Z') = Z'm_H + N'm_n - B(A', Z') \quad (\text{A3.1a})$$

bzw.

$$M(A', Z') = Z'm_H + N'm_n + E_0(A', Z') \quad (\text{A3.1b})$$

Hierbei ist $M(A', Z')$ die Ruhemassenenergie des Kerns der Massenzahl A' , Ordnungszahl Z' und Neutronenzahl N' , m_H die Ruhemassenenergie des Wasserstoffatoms, m_n diejenige des Neutrons und $B(A', Z')$ bzw. $E_0(A', Z')$ schließlich die so definierte (positiv definite) Bindungsenergie bzw. die sog. Grundzustandsenergie. Die Separationsenergien für Protonen bzw. Neutronen für diesen (beliebigen) Kern werden üblicherweise durch

$$S_n(A', Z') = M(A'-1, Z) + m_n - M(A', Z') \quad (\text{A3.2a})$$

$$S_p(A', Z') = M(A'-1, Z'-1) + m_H - M(A', Z') \quad (\text{A3.2b})$$

definiert. Bezeichne nun A die Massenzahl des doppelt-magischen Kerns, Z seine Ordnungs- und N seine Neutronenzahl, so gilt mit der Definition der Bindungsenergie für die hier interessierenden Separationsenergien der Magisch $+1$ -Kerne

$$S_n(A+1, Z) = B(A+1, Z) - B(A, Z) \quad (A3.3a)$$

$$S_p(A+1, Z+1) = B(A+1, Z+1) - B(A, Z) \quad (A3.3b)$$

und für die Separationsenergien des doppelt-magischen Kerns

$$S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z) \quad (A3.3c)$$

$$S_p(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z-1) \quad (A3.3d)$$

Mit der landläufigen Definition chemischer Potentiale (z.B. (Kle70))

$$\mu_n^{\pm 1} = \pm \{E_0(A \pm 1, Z) - E_0(A, Z)\} \quad (A3.4a)$$

$$\mu_p^{\pm 1} = \pm \{E_0(A \pm 1, Z \pm 1) - E_0(A, Z)\} \quad (A3.4b)$$

folgt

$$S_n(A+1, Z) = -\mu_n^{+1} \quad (A3.5a)$$

$$S_p(A+1, Z+1) = -\mu_p^{+1} \quad (A3.5b)$$

$$S_n(A, Z) = \mu_n^{-1} \quad (A3.5c)$$

$$S_p(A, Z) = \mu_p^{-1} \quad (A3.5d)$$

Für die experimentellen Einteilchenenergien ergibt sich nun, wenn $\omega_{v_r t}$ die Anregungsenergien der Magisch ± 1 -Kerne bezeichnet:

$$\text{und} \quad \epsilon_{v_m \pm 1/2} = \omega_{v_m \pm 1/2} + \mu_n^{+1} \quad (A3.6a)$$

$$\epsilon_{v_i \pm 1/2} = -\omega_{v_i \pm 1/2} + \mu_p^{-1} \quad (A3.6b)$$

A3.2 Anregungsenergien in bezug auf den Kerngrundzustand

Die RPA-Gleichungen (2.22), (2.23) und (2.33) liefern die Anregungsenergien der entsprechenden Kerne in Bezug auf die Grundzustandsenergie $E_0 \equiv E_0(A, Z)$ des doppelt-magischen Kerns

$$\Omega_{k(J^\pi)} = E_{k(J^\pi)} - E_0 \quad (2.22, 23, 33b)$$

wobei $k = \tau; \lambda; \kappa(t, -t)$ die jeweilige Kernsorte bezeichnet. Mit der Notation k_0 für die Grundzustände dieser Kerne und der Addition einer "geschickten Null"

$$\Omega_{k(J^\pi)} = E_{k(J^\pi)} - E_{k_0} + E_{k_0} - E_0$$

erhalten wir

$$E_{k(J^\pi)} - E_{k_0} = \Omega_{k(J^\pi)} - (E_{k_0} - E_0) \quad (A3.7)$$

Eine (A3.4) analoge Definition chemischer Potentiale für Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne

$$\begin{aligned} \mu_{p|Z(k)-Z|_n|N(k)-N|}^{A(k)-A} &= \text{sign}(A-A(k)) \{B(A(k), Z(k)) - B(A, Z)\} \\ &= \text{sign}(A-A(k)) \{E_0 - E_{k_0}\} \end{aligned} \quad (A3.8)$$

führt zu

$$\text{bzw. } E_{\tau(J^\pi)} - E_{\tau_0} = \Omega_{\tau(J^\pi)} - \mu_p^{+2} |Z(\tau) - Z|_n |N(\tau) - N| \quad (A3.9a)$$

$$E_{\lambda(J^\pi)} - E_{\lambda_0} = \Omega_{\lambda(J^\pi)} + \mu_p^{-2} |Z(\lambda) - Z|_n |N(\lambda) - N| \quad (A3.9b)$$

Für die beiden Teilchen-Loch-Isobare ergibt eine analoge Prozedur (z.B.)

$$\mu_{pn}^0 = B(A, Z) - B(A, Z+1) \quad (A3.10a)$$

$$\mu_{np}^0 = B(A, Z) - B(A, Z-1) \quad (A3.10b)$$

und somit

$$E_{\kappa(J^\pi; pn^{-1})} - E_{\kappa_0(pn^{-1})} = \Omega_{\kappa(J^\pi; pn^{-1})} - \mu_{pn}^0 \quad (A3.11a)$$

$$E_{\kappa(J^\pi; np^{-1})} - E_{\kappa_0(np^{-1})} = \Omega_{\kappa(J^\pi; np^{-1})} - \mu_{np}^0 \quad (A3.11b)$$

Tabelle 2 enthält die der "Atomic Mass Table" (WP77) entnommenen Bindungsenergien der betrachteten Kerne und Tabelle 3 die daraus berechneten chemischen Potentiale.

Anhang 4: Zu Kapitel 6

A4.1 Relationen zwischen den Restwechselwirkungsmatrixelementen in Teilchen-Loch- und in Zweiteilchen-Kopplung

Gleichung (5.70) definiert direkte und Austauschmatrixelemente. Für direkte gilt

$$\begin{aligned} & \langle v_1 v_2^{-1}, J | v_{res} | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{dir} \\ &= \sum_L (2L+1)(-1)^{j_2+j_3+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \langle v_1 v_4, L | v_{res} | v_2 v_3, L \rangle_{dir} \end{aligned} \quad (A4.1)$$

wobei die 6j-Symbole gemäß (Ed74,eq.(6.2.3)) definiert sind durch

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6} \\ & \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ -m_1 & m_5 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ -m_4 & -m_2 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ m_4 & -m_5 & -m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A4.2)$$

Die Relation (A4.1) kann man ("ohne weiteres") mit den Definitionen drehimpulsgekoppelter Zustände, den Eigenschaften von 3j-Symbolen, dem Wigner-Eckart-Theorem (A2.20) für skalare Operatoren unter besonderer Berücksichtigung der Halbzahligkeit der j sowie der Ganzzahligkeit der J und M ableiten (letzteres bedingt etwa $(-1)^{2J} = (-1)^{2M} = 1$, $(-1)^{j_1+j_2} = -(-1)^{-j_1+j_2}$, $(-1)^{m_1-m_2} = -(-1)^{m_1+m_2}$ etc). Für 6j-Symbole gelten folgende Relationen ((Rot59, eq.(2.6),(2.7)):

$$\sum_{\ell} (2\ell+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j'' \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{j'j''}}{2j''+1} \quad (A4.3a)$$

und

$$\sum_j (-1)^{\ell'+\ell''+j} (2j+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \ell_2 & \ell_1 & \ell'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & \ell_2 & \ell'' \\ j_2 & \ell_1 & \ell' \end{Bmatrix} \quad (A4.3b)$$

Mit (A4.3a) kann man die Relation (A4.1) umkehren:

$$\begin{aligned} & \langle v_1 v_2, J | v_{res} | v_3 v_4, J \rangle_{dir} \\ &= \sum_L (2L+1)(-1)^{j_3+j_4+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & L \end{Bmatrix} \langle v_1 v_3^{-1}, L | v_{res} | v_4 v_2^{-1}, L \rangle_{dir} \end{aligned} \quad (A4.4)$$

Mit der Symmetrierelation (A2.6b) für C.G.-Koeffizienten und der Definition von Austauschenergiematrizen (5.70) ergibt sich aus (A4.1)

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1 v_2^{-1}, J | V_{\text{res}} | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} \\
 &= \sum_L (2L+1) (-1)^{j_2+j_3+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \langle v_1 v_4, L | V_{\text{res}} | v_2 v_3, L \rangle_{\text{ex}} \\
 &= \sum_L (2L+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \langle v_1 v_4, L | V_{\text{res}} | v_3 v_2, L \rangle_{\text{dir}}
 \end{aligned} \tag{A4.5}$$

Die Umkehrung ergibt in diesem Fall (mit (A4.3b))

$$\begin{aligned}
 & \langle v_1 v_2, J | V_{\text{res}} | v_3 v_4, J \rangle_{\text{ex}} \\
 &= \sum_L (2L+1) (-1)^{j_3+j_4+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{Bmatrix} \langle v_1 v_4^{-1}, J | V_{\text{res}} | v_3 v_2^{-1}, J \rangle_{\text{ex}}
 \end{aligned} \tag{A4.6}$$

A4.2 Anmerkungen zur Berechnung des Spin-Winkel-Anteils der spinabhängigen Komponenten von Deltafunktions- und Zentralpotentialen

Zur Berechnung des Spin-Winkel-Anteils von

$$\left\langle \frac{1}{2} j_1 j_1 \left(\frac{1}{2} j_2 j_2 \right)^{-1}, J \middle| \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \middle| \frac{1}{2} j_3 j_3 \left(\frac{1}{2} j_4 j_4 \right)^{-1}, J \right\rangle_{\text{dir}}$$

benötigt man außer den schon (bis Kap. 6.1) erwähnten Beziehungen folgende Relationen: Zum einen

$$S^{(k_1)} \cdot T^{(k_1)} U^{(k_2)} \cdot V^{(k_2)} = (-1)^{k_1+k_2} \sum_k (-1)^k [S^{(k_1)} \times U^{(k_2)}]^{(k)} \cdot [T^{(k_1)} \times V^{(k_2)}]^{(k)} \tag{A4.6}$$

(die aus (dST63, Ch.14&15) abzuleiten (Kle82b) und im übrigen auch für den Beweis der Formel (5.21) zur variablenseparierten Darstellung des Tensoroperators zentral ist); zum anderen die (6.3) entsprechende Relation (Ed74, eq. (7.1.5)) für Tensorprodukte; ferner die Beziehung ((dST63, p.517); (dSF74, eq. (6.8)))

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{matrix} \right\} \left(\begin{matrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{matrix} \right)$$

$$= \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_3 m_4}} \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & -m_1 - m_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & -m_2 - m_4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} J_{13} & J_{24} & J \\ -m_1 - m_3 & -m_2 - m_4 & M \end{matrix} \right)$$

sowie folgende 3j-Symbole, die sich aus (Ed74,eq.(3.7.11))

$$\left(\begin{matrix} j_1 & 1/2 & \ell_1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix} \right) = \frac{(-1)^{j_1-1/2}}{\sqrt{2(2\ell_1+1)}} , \quad \left(\begin{matrix} j_1 & 1/2 & \ell_1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right) = \frac{(-1)^{\ell_1+1}}{\sqrt{2(2\ell_1+1)}}$$

bzw. aus (Rot59,eq.(1.58),(1.59))

$$\left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{matrix} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ergeben, und die reduzierten Matrixelemente ((Ed74,eq.(5.4.4)); (Me61,C.85f, p.1076))

$$\left\langle \frac{1}{2} \parallel \vec{\sigma}^{(n)} \parallel 1/2 \right\rangle = \sqrt{2(2n+1)}$$

mit

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \begin{cases} \vec{1} & | n=0 \\ \vec{\sigma} & | n=1 \end{cases} \quad (\text{A4.7})$$

und ferner ein wenig Geduld, um zum Resultat (A5.2) zu gelangen. In dem im Kap. 6.1 erläuterten Sinne bildet diese Ableitung die Basis zur Berechnung des Spin-Winkel-Anteils der spinabhängigen Komponente von Zentralpotentialen.

Zur Abkürzung der Schreibart ist es von Vorteil, das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen (Jac75,eq.(3.62))

$$P_{\ell}(\cos \vartheta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} Y^{(\ell)}(\Omega_1) \cdot Y^{(\ell)}(\Omega_2) \quad (\text{A4.8})$$

bei der Tabellierung der Matrixelemente von Zentralpotentialen heranzuziehen; diese sind im Anhang 5 daher in der Form

$$\left\langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 \left(\frac{1}{2} \ell_2 j_2 \right)^{-1, J} \middle| \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(n)} p_\ell(\cos \gamma) \middle| \frac{1}{2} \ell_3 j_3 \left(\frac{1}{2} \ell_4 j_4 \right)^{-1, J} \right\rangle_{\text{dir}} \quad (\text{A4.9})$$

zu finden. Bei der Berechnung der direkten Matrixelemente bricht die Summe über ℓ wegen des Auftretens von Kroneckersymbolen ($\delta_{\ell J}$; $\delta_{\ell-1, J}$; $\delta_{\ell+1, J}$) infolge Orthogonalitätsrelationen zusammen; bei der Berechnung der Austauschmatrixelemente aus (A4.9) via (A4.4) → (A4.5) lebt sie aber wieder auf (keine Kroneckerrelationen zwischen ℓ und J). Zur Herleitung von (A5.7)-(A5.10) benötigt man zusätzlich die Rekursionsrelation (Kle82b)

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{k_2 - (-1)^{j_1+j_2+J} k_1}{\sqrt{J(J+1)}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die 3j-Symbole ((Rot59,eq.(1.52),(1.52')); (Ed74,eq.(3.7.17))

$$\begin{pmatrix} L & L-1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{L+1} \sqrt{\frac{L+1}{2(2L+1)(2L-1)}}, \quad \begin{pmatrix} L & L-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \sqrt{\frac{L}{(2L+1)(2L-1)}}$$

$$\begin{pmatrix} L & L-1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^L \sqrt{\frac{L-1}{2(2L+1)(2L-1)}}, \quad \begin{pmatrix} L & L & 1 \\ -\mu & 0 & \mu \end{pmatrix} = \frac{\mu(-1)^{L+1}}{\sqrt{2(2L+1)}}$$

A4.3 "Rückwärtslaufende" direkte Teilchen-Loch-Matrixelemente

Mit den bis zu diesem Punkt angesprochenen Techniken der Drehimpulsalgebra kann man ohne weiteres zeigen (Kle82b):

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} S, \ell_1 \ell_2^{-1} L, J \middle| \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(n)} \delta(\Omega - \Omega') \middle| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} S, \ell_3 \ell_4^{-1} L, J \right\rangle_{\text{dir}} \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} S, \ell_1 \ell_2^{-1} L, J \middle| \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(n)} Y^{(L)}(\Omega) \cdot Y^{(L)}(\Omega') \middle| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} S, \ell_3 \ell_4^{-1} L, J \right\rangle_{\text{dir}} \quad (\text{A4.10}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta_{nS} (-1)^{\ell_1+\ell_3} \sqrt{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)(2\ell_4+1)} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 & \ell_4 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beim Übergang von "vorwärts-" zu "rückwärtslaufenden" Matrixelementen (3↔4) gilt für beide Potentialtypen wegen der Symmetrierelation (A2.6b) und der Tatsache, daß der Spin-Singulettzustand $S=0$ antisymmetrisch ist, der Spin-Triplettzustand $S=1$ aber symmetrisch ist (in symbolischer Schreibweise; L, S, J ganzzahlig)

$$\begin{aligned} M_{1234,b} &= M_{1243,f} = (-1)^{1/2+1/2-S+(1-S)+\ell_3+\ell_4-L} M_{1234,f} \\ &= (-1)^{\ell_3+\ell_4-(L+S)-S} M_{1234,f} \\ M_{1234,b} &= (-1)^S (-1)^{\ell_3+\ell_4+J} M_{1234,f} \end{aligned} \quad (A4.11)$$

Wegen des Kroneckersymbols in (A4.10) ergibt die Inspektion des Radialanteils in (6.24) sowie des Winkelanteils (A5.7) für spinunabhängige Zentralpotentiale aufgrund $(-1)^{\ell_3+\ell_4+J} [1+(-1)^{\ell_1+\ell_2+J}] = [1+(-1)^{\ell_1+\ell_2+J}]$:

$$\langle v_1 v_2^{-1}, J | P_\ell(\cos \vartheta) | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir},b} = \langle v_1 v_2^{-1}, J | P_\ell(\cos \vartheta) | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir},f} \quad (A4.12)$$

für spinabhängige hingegen

$$\begin{aligned} &\langle v_1 v_2^{-1}, J | \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' P_\ell(\cos \vartheta) | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir},b} \\ &= (-1)^{\ell_1+\ell_2+J+1} \langle v_1 v_2^{-1}, J | \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}' P_\ell(\cos \vartheta) | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir},f} \end{aligned} \quad (A4.13)$$

Analog gilt für Deltakräfte in der Notation (A5.1,2)

$$\hat{E}_{1234,b} = (-1)^{\ell_1+\ell_2+J} \hat{E}_{1234,f} = \hat{E}_{1234,f} \quad (A4.14)$$

$$\hat{E}_{1234,b}^S = (-1)^{\ell_1+\ell_2+J+1} \hat{E}_{1234,f}^S \quad (A4.15)$$

und somit

$$\hat{C}_{1234,b} = \frac{1}{4} (\hat{E}_{1234,b} - \hat{E}_{1234,b}^S)$$

$$\hat{C}_{1234,b} = \frac{1}{4} (-1)^{\ell_1+\ell_2+J} (\hat{E}_{1234,f} + \hat{E}_{1234,f}^S) \quad (A4.16a)$$

oder symbolisch

$$\pi_{0,b} = \frac{(-1)^{\ell_1 + \ell_2 + J}}{4} (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \quad (A4.16b)$$

Analog gilt

$$\pi_{1,b} = \frac{(-1)^{\ell_1 + \ell_2 + J}}{4} (3 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \quad (A4.17)$$

Die Isospinmatrixelemente ändern sich beim Übergang von vorwärts- zu rückwärtslaufenden direkten Matrixelementen weder für den doppelt-magischen Kern noch für seine Teilchen-Loch-Isobare. Man erhält daher die rückwärtslaufenden direkten aus den vorwärtslaufenden direkten Matrixelementen im Fall von Zentralpotentialen durch die Phasenmultiplikation (A4.12,13), im Fall von Delta-potentialen durch die (A4.16,17) entsprechende Linearkombinationen.

Für Tensorpotentiale gilt eine (A4.13) analoge Beziehung (gleiche Phase).

A4.4 Zur Berechnung der Tensorpotential-Matrixelemente

Mit der symbolischen Notation (6.23c) für den Radialanteil gilt für die in dieser Arbeit verwendeten Tensor-Wechselwirkungen, von Stärkeparametern und der Isospinabhängigkeit abgesehen,

$$V_T = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{6}{5}} \sum_{k_1 k_2} i^{k_1 - k_2} \sqrt{(2k_1 + 1)(2k_2 + 1)} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot [\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2]^{(2)} \cdot [Y^{(k_1)} \times Y^{(k_2)}]^{(2)} v_T^{(k_1, k_2; 2)}(r_1, r_2) \quad (A4.18)$$

Da im Tensorprodukt - (5.22) - der Kugelflächenfunktionen der C.G.-Koeffizient $\langle k_1 m_1 k_2 m_2 | 2m \rangle$ auftritt, gelten die Dreiecksungleichungen (A2.5c)

$$k_1 + k_2 - 2 \geq 0 \wedge k_1 - k_2 + 2 \geq 0 \wedge k_2 - k_1 + 2 \geq 0 \quad (A4.19a)$$

$$\rightarrow k_1 + k_2 \geq 2 \wedge -2 \leq k_1 - k_2 \leq 2 \quad (A4.19b)$$

Da in V_T ferner $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ auftritt, muß $k_1 + k_2$ darüber hinaus gerade sein; man kann \sum_{k_1, k_2} daher durch eine Summe über einen Index $\ell \geq 1$ über drei Terme ersetzen: (1) $k_1 = k_2 = \ell$; (2) $k_1 = \ell - 1, k_2 = \ell + 1$; (3) $k_1 = \ell + 1, k_2 = \ell - 1$. Mit $i^0 = 1, i^2 = i^{-2} = -1$ sowie

$$\begin{pmatrix} \ell+1 & \ell-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell-1 & \ell+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} v_T = & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{6}{5}} \sum_{\ell \geq 1} [(2\ell+1) \begin{pmatrix} \ell & \ell & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}']^{(2)} \cdot [Y^{(\ell)} \times Y^{(\ell)}]^{(2)} v_T^{(\ell, \ell; 2)}(r_1, r_2) \\ & - \sqrt{(2\ell-1)(2\ell+3)} \begin{pmatrix} \ell-1 & \ell+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}']^{(2)} \cdot [Y^{(\ell-1)} \times Y^{(\ell+1)}]^{(2)} v_T^{(\ell-1, \ell+1; 2)}(r_1, r_2) \\ & + [Y^{(\ell+1)} \times Y^{(\ell-1)}]^{(2)} v_T^{(\ell+1, \ell-1; 2)}(r_1, r_2) \} \end{aligned} \quad (A4.20)$$

Die Spin-Winkel-Anteile der (Teilchen-Loch-)Matrixelemente der beiden letzten Summanden sind durch Symmetrierelationen miteinander verbunden, was den Rechenaufwand reduziert. Mit der gemeinsamen Bezeichnung $C_{1234}^{\ell-1, \ell+1}$ für die durch (A5.11), (A5.12) definierten Matrixelemente gilt mit den Umkopplungsbeziehungen (A4.1), (A4.5)

$$\begin{aligned} C_{1234}^{\ell-1, \ell+1} = & \langle \frac{1}{2} \ell_1 j_1 (\frac{1}{2} \ell_2 j_2)^{-1}, J | [\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}']^{(2)} \\ & \cdot [Y^{(\ell-1)} \times Y^{(\ell+1)}]^{(2)} | \frac{1}{2} \ell_3 j_3 (\frac{1}{2} \ell_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{\text{dir ex}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1234}^{\ell-1, \ell+1} = & \sum_L (2L+1)(-1)^{k_2+k_3+L+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j_3 & j_4 & L \end{matrix} \right\} \\ & \cdot \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, L | [\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}']^{(2)} \\ & \cdot [Y^{(\ell-1)} \times Y^{(\ell+1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2} \ell_2) j_2 (\frac{1}{2} \ell_3) j_3, L \rangle_{\text{dir ex}} \end{aligned}$$

und mit den bekannten Symmetriebeziehungen für 6j-Symbole, C.G.-Koeffizienten und der Ganzzahligkeit von L folgt

$$\begin{aligned} C_{1234}^{\ell-1, \ell+1} = & (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} \sum_L (2L+1)(-1)^{k_2+k_3+L+1} \left\{ \begin{matrix} j_4 & j_3 & J \\ j_2 & j_1 & L \end{matrix} \right\} \\ & \cdot \langle (\frac{1}{2} \ell_4) j_4 (\frac{1}{2} \ell_1) j_1, L | [\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}']^{(2)} \cdot [Y^{(\ell+1)} \times Y^{(\ell-1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, L \rangle_{\text{dir ex}} \\ C_{1234}^{\ell-1, \ell+1} = & (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} C_{4321}^{\ell+1, \ell-1}, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$A_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} A_{4321}^{\ell+1, \ell-1} \quad (\text{A4.21a})$$

$$B_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} B_{4321}^{\ell+1, \ell-1} \quad (\text{A4.21b})$$

Mit (A4.5) gilt für reelle Austauschmatrixelemente

$$\langle v_1 v_2^{-1}, J | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} = \langle v_3 v_4^{-1}, J | v_1 v_2^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} \quad (\text{A4.22a})$$

und mit (A4.1) für reelle direkte

$$\langle v_1 v_2^{-1}, J | v_3 v_4^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} = (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} \langle v_2 v_1^{-1}, J | v_4 v_3^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \quad (\text{A4.22b})$$

Aus (A4.21) und (A4.22) resultiert

$$A_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = A_{3412}^{\ell-1, \ell+1} \quad (\text{A4.23a})$$

$$B_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} B_{2143}^{\ell-1, \ell+1} \quad (\text{A4.23b})$$

und mit der Ringphasenkonvention (2.28)

$$\tilde{A}_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = \tilde{A}_{3412}^{\ell-1, \ell+1} \quad (\text{A4.24a})$$

$$\tilde{B}_{1234}^{\ell+1, \ell-1} = \tilde{B}_{2143}^{\ell-1, \ell+1} \quad (\text{A4.24b})$$

A4.5 "Bahndrehimpulsauswahlregeln"

Natürlich kann man einen jj -gekoppelten Zustand $|(\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J\rangle$ nach LS-gekoppelten $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}, S\rangle |\ell_1 \ell_2, L\rangle$ entwickeln; Einsetzen ergibt im Fall von Zentralpotentialen

$$\begin{aligned} & \langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | \hat{\sigma}^{(n)} \cdot \hat{\sigma}^{(n)} Y^{(\ell)} \cdot Y^{(\ell)} | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{dir}} \\ & \sim \langle \ell_1 \ell_2, L | Y^{(\ell)} \cdot Y^{(\ell)} | \ell_3 \ell_4, L \rangle \sim \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_3 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_4 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A4.25})$$

was über die Dreiecksungleichungen für die $3j$ -Symbole zu den "Bahndrehimpuls-
auswahlregeln"

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_3 &\geq \ell & |\ell_1 - \ell_3| &\leq \ell \\ \ell_2 + \ell_4 &\geq \ell & |\ell_2 - \ell_4| &\leq \ell \end{aligned} \quad (\text{A4.26})$$

und zu entsprechenden Relationen für Austauschmatrixelemente in Zweiteilchen- sowie Teilchen-Loch-Kopplung (letztere: vorwärts bzw. rückwärts) führt.

Für Tensorpotentialmatrixelemente ergibt sich in analoger Weise

$$\begin{aligned} &\langle (\frac{1}{2} \ell_1) j_1 (\frac{1}{2} \ell_2) j_2, J | [\sigma \times \sigma']^{(2)} \cdot [Y^{(k_1)} \times Y^{(k_2)}]^{(2)} | (\frac{1}{2} \ell_3) j_3 (\frac{1}{2} \ell_4) j_4, J \rangle_{\text{dir}} \\ &\sim \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_3 & k_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_2 & \ell_4 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A4.27})$$

A4.6 Isospinstruktur der Matrixelemente (von Wechselwirkungen endlicher Reichweite)

Für Potentialoperatoren der Form

$$\hat{V} = (\alpha_0 + \alpha_\tau \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') V \quad (\text{A4.28})$$

gilt

(1) im Fall doppelt-magischer Kerne

$$\begin{aligned} &\langle v_1 t (v_2 t)^{-1}, J | \hat{V} | v_3 t' (v_4 t')^{-1}, J \rangle \\ &= [\alpha_0 + (2\delta_{tt'} - 1)\alpha_\tau] \langle v_1 t (v_2 t)^{-1}, J | V | v_3 t' (v_4 t')^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\ &\quad - [\delta_{tt'} \alpha_0 + (2 - \delta_{tt'})\alpha_\tau] \langle v_1 t (v_2 t)^{-1}, J | V | v_3 t' (v_4 t')^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} \end{aligned} \quad (\text{A4.29a})$$

(2) im Fall seiner Teilchen-Loch-Isobare

$$\begin{aligned} &\langle v_1 t (v_2 t')^{-1}, J | \hat{V} | v_3 t (v_4 t')^{-1}, J \rangle \\ &= 2\alpha_\tau \langle v_1 t (v_2 t')^{-1}, J | V | v_3 t (v_4 t')^{-1}, J \rangle_{\text{dir}} \\ &\quad - [\alpha_0 - \alpha_\tau] \langle v_1 t (v_2 t')^{-1}, J | V | v_3 t (v_4 t')^{-1}, J \rangle_{\text{ex}} \end{aligned} \quad (\text{A4.29b})$$

(3) im Fall von gg-Zweiteilchen- bzw. Zweilochkernen

$$\langle \nu_1 t \nu_2 t, J | \hat{V} | \nu_3 t \nu_4 t, J \rangle \quad (\text{A4.29c})$$

$$= (\alpha_0 + \alpha_\tau) [\langle \nu_1 t \nu_2 t, J | V | \nu_3 t \nu_4 t, J \rangle_{\text{dir}} - \langle \nu_1 t \nu_2 t, J | V | \nu_3 t \nu_4 t, J \rangle_{\text{ex}}]$$

(4) im Fall von uu-Zweiteilchen- bzw. -Zweilochkernen

$$\langle \nu_1 t \nu_2 t', J | \hat{V} | \nu_3 t \nu_4 t', J \rangle \quad (\text{A4.29d})$$

$$= (\alpha_0 - \alpha_\tau) \langle \nu_1 t \nu_2 t', J | V | \nu_3 t \nu_4 t', J \rangle_{\text{dir}} - 2\alpha_\tau \langle \nu_1 t \nu_2 t', J | V | \nu_3 t \nu_4 t', J \rangle_{\text{ex}}$$

$$(t = -1/2, t' = 1/2)$$

Anhang 5: Die Spin-Winkelanteile der Wechselwirkungsmatrixelemente
(tabellarisch)

Notation:

$$k_\alpha = j_\alpha + 1/2 \quad (2.27)$$

$$\tilde{k}_\alpha = (-1)^{k_\alpha + l_\alpha} k_\alpha \quad (A5.0a)$$

$$\theta(L) = \begin{cases} 0, & L=0 \\ 1, & L>0 \end{cases} \quad (A5.0b)$$

a) δ -Wechselwirkungen

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1234} &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, j_1 | \delta(R-R') | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, j_2 \rangle_{dir} \quad (A5.1) \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^{k_1+k_3} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} [1 + (-1)^{l_1+l_2+\vartheta}] \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1234}^S &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, j_1 | \vec{r} \cdot \vec{r}' \delta(R-R') | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, j_2 \rangle_{dir} \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^{k_1+k_3} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \left\{ 2(-1)^{l_1+k_2+l_3+k_4} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + [1 + (-1)^{l_1+l_2+\vartheta}] \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \right\} \quad (A5.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{1234} &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, j_1 | \pi_\sigma \delta(R-R') | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, j_2 \rangle_{dir} \\ &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \left\{ (-1)^{l_1+l_3+1} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k_2+k_4+l_1+l_2+\vartheta} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \right\} \quad (A5.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{1234} &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, j_1 | \pi_1 \delta(R-R') | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, j_2 \rangle_{dir} \\ &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \left\{ (-1)^{l_1+l_3} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} -1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k_2+k_4} [2 + (-1)^{l_1+l_2+\vartheta}] \begin{pmatrix} j_1 j_2 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 j \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \right\} \quad (A5.4) \end{aligned}$$

$$C_{\sigma_{1234}} = \langle (\frac{1}{2} l_1) j_1 (\frac{1}{2} l_2) j_2, J | \pi_{\sigma} \delta(Z-2') | (\frac{1}{2} l_3) j_3 (\frac{1}{2} l_4) j_4, J \rangle_{dir}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+l_2+k_3+l_4} [1+(-1)^{l_1+l_2+J}] \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \quad (A5.5)$$

$$C_{1_{1234}} = \langle (\frac{1}{2} l_1) j_1 (\frac{1}{2} l_2) j_2, J | \pi_1 \delta(Z-2') | (\frac{1}{2} l_3) j_3 (\frac{1}{2} l_4) j_4, J \rangle_{dir}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+k_2+k_3+k_4} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} \left\{ 2 \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \right. \quad (A5.6)$$

$$\left. + (-1)^{l_1+l_2+l_3+k_4} [1+(-1)^{l_1+l_2+J}] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \right\}$$

b) Zentral-Wechselwirkungen (siehe Anhang 4.2!)

$$\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, J | P_e(\cos \vartheta) | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{dir} \quad (A5.7)$$

$$= \frac{2}{2J+1} (-1)^{k_1+k_3} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} [1+(-1)^{l_1+l_2+J}] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \delta_{2J}$$

$$\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, J | P_e(\cos \vartheta) | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{ex} \quad (A5.8)$$

$$= 2 (-1)^{k_1+k_3+l+J+1} \sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4} [1+(-1)^{l_1+l_2+J}] \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & l \end{matrix} \right\}$$

$$\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_e(\cos \vartheta) | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{dir}$$

$$= 2 (-1)^{k_1+k_3} [1+(-1)^{l_1+l_2+J}] \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4}}{l(l+1)(2l+1)(2J+1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix}$$

$$\cdot \left\{ (l+1)(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2+l)(\tilde{k}_3+\tilde{k}_4+l) \delta_{l-1,J} \right. \quad (A5.9)$$

$$+ (2l+1)(\tilde{k}_1-\tilde{k}_2)(\tilde{k}_3-\tilde{k}_4) \delta_{l,J} \theta(l-1)$$

$$\left. + l(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2-l-1)(\tilde{k}_3+\tilde{k}_4-l-1) \delta_{l+1,J} \right\}$$

$$\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_e(\cos \vartheta) | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, J \rangle_{ex}$$

$$= 2 (-1)^{k_1+k_3+l+J} [1+(-1)^{l_1+l_3+l}] \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3 k_4}}{l(l+1)(2l+1)} \quad (A5.10)$$

$$\cdot \left[(l+1)(\tilde{k}_1+\tilde{k}_3+l)(\tilde{k}_2+\tilde{k}_4+l) \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & l-1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & l-1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & l-1 \end{matrix} \right\} \theta(l-1) \right.$$

$$- (2l+1)(\tilde{k}_1-\tilde{k}_3)(\tilde{k}_2-\tilde{k}_4) \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & l \end{matrix} \right\} \theta(l-1)$$

$$\left. + l(\tilde{k}_1+\tilde{k}_3-l-1)(\tilde{k}_2+\tilde{k}_4-l-1) \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & l+1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & l+1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J \\ j_4 & j_3 & l+1 \end{matrix} \right\} \right]$$

c) Tensor-Wechselwirkungen (Kle32b)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{1234}^{l-1, l+1} &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, \mathcal{J} | [\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)} \times \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, \mathcal{J} \rangle_{dir} \\
 &= \frac{1}{4\pi (2\mathcal{J}+1)} (-1)^{k_1+k_3+l+1} [1+(-1)^{l_1+l_2+l+1}] [1+(-1)^{l_3+l_4+l+1}] \sqrt{\frac{5 k_1 k_2 k_3 k_4}{l(l+1)(2l+1)}} \\
 &\quad \cdot (l - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)(l+1 + \tilde{k}_3 + \tilde{k}_4) \begin{pmatrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 \mathcal{J} \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \delta_{2\mathcal{J}} \Theta(\mathcal{J}-1) \quad (A5.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{1234}^{l-1, l+1} &= \langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, \mathcal{J} | [\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)} \times \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, \mathcal{J} \rangle_{ex} \\
 &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+k_3+l} [1+(-1)^{l_1+l_3+l+1}] [1+(-1)^{l_2+l_4+l+1}] \sqrt{\frac{5 k_1 k_2 k_3 k_4}{l(l+1)(2l+1)}} \\
 &\quad \cdot (l - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_3)(l+1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_4) \begin{pmatrix} j_1 j_3 l \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 j_4 l \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ j_4 j_3 l \end{matrix} \right\} \Theta(l-1) \quad (A5.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, \mathcal{J} | [\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)} \times \gamma'^{(l)}]^{(2)} | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, \mathcal{J} \rangle_{dir} \\
 &= \frac{1}{4\pi (2\mathcal{J}+1)} (-1)^{k_1+k_3+l+1} [1+(-1)^{l_1+l_2+l}] [1+(-1)^{l_3+l_4+l}] \sqrt{\frac{5 k_1 k_2 k_3 k_4}{l(2l+1)}} \begin{pmatrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 j_4 \mathcal{J} \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{l} (l + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2)(l + \tilde{k}_3 + \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+3)}{l(2l-1)}} \delta_{l-1, \mathcal{J}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2l+1}{l(l+1)} (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)(\tilde{k}_3 - \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{(2l-1)(2l+3)}{l(l+1)}} \delta_{2\mathcal{J}} \Theta(\mathcal{J}-1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{l+1} (l+1 - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)(l+1 - \tilde{k}_3 - \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}} \delta_{l+1, \mathcal{J}} \right] \quad (A5.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\langle \frac{1}{2} l_1 j_1 (\frac{1}{2} l_2 j_2)^{-1}, \mathcal{J} | [\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)} \times \gamma'^{(l)}]^{(2)} | \frac{1}{2} l_3 j_3 (\frac{1}{2} l_4 j_4)^{-1}, \mathcal{J} \rangle_{ex} \\
 &= \frac{1}{4\pi} (-1)^{k_1+k_3+l+1} [1+(-1)^{l_1+l_3+l}] [1+(-1)^{l_2+l_4+l}] \sqrt{\frac{5 k_1 k_2 k_3 k_4}{l(2l+1)}} \Theta(l-1) \\
 &\quad \cdot \left[\frac{1}{l} (l + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_3)(l + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+3)}{l(2l-1)}} \begin{pmatrix} j_1 j_3 l-1 \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 j_4 l-1 \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ j_4 j_3 l-1 \end{matrix} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2l+1}{l(l+1)} (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_3)(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{(2l-1)(2l+3)}{l(l+1)}} \begin{pmatrix} j_1 j_3 l \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 j_4 l \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ j_4 j_3 l \end{matrix} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{l+1} (l+1 - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_3)(l+1 - \tilde{k}_2 - \tilde{k}_4) \sqrt{\frac{l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}} \begin{pmatrix} j_1 j_3 l+1 \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 j_4 l+1 \\ \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \sigma \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 \mathcal{J} \\ j_4 j_3 l+1 \end{matrix} \right\} \right] \quad (A5.14)
 \end{aligned}$$

d) Umkopplungsrelationen für Zentral-Wechselwirkungen

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{dir} \quad (A5.15)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l} [(-1)^{k_1+k_3} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{ex, f}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{ex} \quad (A5.16)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+J+1} [(-1)^{k_1+k_4} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, b}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{dir} \quad (A5.17)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+1} [(-1)^{k_1+k_3} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, f}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{ex} \quad (A5.18)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+J} [(-1)^{k_1+k_4} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | \vec{e} \cdot \vec{e}' P_2(\cos\vartheta) | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, b}]$$

e) Umkopplungsrelationen für Tensor-Wechselwirkungen

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)}_x \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{dir} \quad (A5.19)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l} [(-1)^{k_1+k_3} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)}_x \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, f}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)}_x \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{ex} \quad (A5.20)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+J+1} [(-1)^{k_1+k_4} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l-1)}_x \gamma'^{(l+1)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, b}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)}_x \gamma'^{(l)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{dir} \quad (A5.21)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+1} [(-1)^{k_1+k_3} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)}_x \gamma'^{(l)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, f}]$$

$$\langle (\frac{1}{2}l_1)j_1 (\frac{1}{2}l_2)j_2, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)}_x \gamma'^{(l)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4, J \rangle_{ex} \quad (A5.22)$$

$$= (-1)^{k_1+k_3+l+J} [(-1)^{k_1+k_4} \langle \frac{1}{2}l_1 j_1 (\frac{1}{2}l_2 j_2)^{-1}, J | [\vec{e} \times \vec{e}']^{(2)} \cdot [\gamma^{(l)}_x \gamma'^{(l)}]^{(2)} | (\frac{1}{2}l_3)j_3 (\frac{1}{2}l_4)j_4^{-1}, J \rangle_{ex, b}]$$

Tabellenlegende

Tabelle 1: Blomqvist-Wahlborn Potentialparameter

- definiert durch (3.1)

Tabelle 2: Bindungsenergien

- definiert durch (A3.1), entnommen (WB77)

Tabelle 3: Chemische Potentiale

- definiert durch (A3.4), (A3.10) bzw. (A3.8)

Tabelle 4: Experimentelle Einteilchenenergien $\varepsilon_{\nu_{rt}}$ und die entsprechenden experimentellen Anregungsenergien $\omega_{\nu_{rt}}$

- $\varepsilon_{\nu_{rt}}$ definiert durch (A3.6), $\omega_{\nu_{rt}}$ entnommen (LS78)

TINLK ist die programminterne Bezeichnung der Einteilchenzustandsquantenzahlen:

T = 1 Teilchen-, T = 0 Lochzustand;

I = 1 Proton-, I = 0 Neutronzustand;

N Radialquantenzahl n,

L Bahndrehimpulsquantenzahl l,

K = j + 1/2 (2.27)

Tabelle 5: Parameter der (π +g)-Austauschwechselwirkung

- definiert in Kap. 5.2. ($\hbar c$ und C_0 siehe Tabelle 7).

Bzgl. der Vorzeichen der Stärkeparameter siehe Legende zu Tabelle 6.

Tabelle 6: Parameter der OBE-G-Matrizen

- definiert durch (5.57), (5.58)

In Anführungsstrichen die programminternen Namen der entsprechenden "Mesonen". Die Stärkeparameter sind in Einheiten von $C_0 = 386 \text{ MeVfm}^3$ angeführt und reproduzieren die von K. Nakayama auf fünf Dezimalstellen in MeVfm^3 angegebenen Werte. Für die Tensorstärkeparameter werden die vorzeichenumgekehrten Werte angegeben, da wegen des verschiedenen Vorzeichens von Tensor- und Yukawaanteil in V_{π} (5.20) der Programmteil zur Matrixelementberechnung Tensorpotentiale mit (-1) multipliziert.

Tabelle 7: Einige Konstanten und Parameter

- γ Umrechnungsfaktor erg \rightarrow MeV,
- b Oszillatorkonstante für Blei,
- C_σ Normierungsfaktor für die Stärkeparameter

Tabelle 8: Differenz ($E_{\text{theor}} - E_{\text{exp}}$) für die Grundzustände

("RPA & $G_{\pi+\lambda}$ ")

- Abweichung der in der RPA mit $G_{\pi+\lambda}$ berechneten Grundzustandsenergien der Zweiteilchen- bzw. Zweilochkerne von den experimentellen Werten

Tabelle 9: 3_1^- in gg-Kernen

- erste angeregte 3^- -Zustände;
- experimentelle Werte nach (LS78), theoretische Werte berechnet in der RPA mit den spezifizierten G-Matrizen

Tabelle 10: Die beiden größten Y-Amplituden (mit den zugehörigen Konfigurationen) für die tiefstliegenden Zustände.

10.1 in den Zweiteilchenkernen

10.2 in den Zweilochkernen

- berechnet mit $G_{\pi+p}$ (Kap. 5.2, Tab. 5), $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$ bzw. $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$ ((5.57,58), Tab. 6) sowie ggf. V_C (Kap. 5.5). Zur Notation der Quantenzahlen siehe Legende zu Tabelle 4.

Tabelle 11: Die tiefliegenden Zustände der Kernspektren in den Figuren 5 bis 15 mit den beiden Hauptkonfigurationen, berechnet in der RPA für $G_{\pi+p}$ und $G_{OBE}^{(in)}$ bzw. $G_{OBE}^{(surf)}$ (ggf. + V_C) (Def. siehe Legende zu Tabelle 10).

J: Kernspin; PAR: Parität π ; #: Numerierung der Kernzustände J^π in energetischer Reihenfolge; Quantenzahlen der beiden Hauptkonfigurationen (Notation: Legende zu Tab. 4) und zugehörigen X-Amplituden sowie die Summe der Einteilchenenergien, bezogen auf den jeweiligen Kerngrundzustand (Schalenmodellkonfigurationsenergien) in MeV; Zustandsenergie E [MeV].

11.1	^{210}Po	(a) $G_{\pi+p} + V_C$	11.5	^{210}Bi	(a) $G_{\pi+p}$
		(b) $G_{OBE}^{(surf)} + V_C$			(b) $G_{OBE}^{(surf)}$
11.2	^{206}Hg	(a) $G_{\pi+p} + V_C$	11.6	^{206}Tl	(a) $G_{\pi+p}$
		(b) $G_{OBE}^{(in)} + V_C$			(b) $G_{OBE}^{(in)}$
11.3	^{210}Pb	(a) $G_{\pi+p}$	11.7	^{208}Bi	(a) $G_{\pi+p}$
		(b) $G_{OBE}^{(surf)}$			(b) $G_{OBE}^{(in)}$
11.4	^{206}Pb	(a) $G_{\pi+p}$	11.8	^{208}Tl	(a) $G_{\pi+p}$
		(b) $G_{OBE}^{(in)}$			(b) $G_{OBE}^{(in)}$

Tabelle 1: Blomqvist-Wahlborn-Potential Parameter

V_0^p [MeV]	V_0^n [MeV]	R [fm]	α [fm]	m [10_g^{-24}]	λ	Z
58.0	44.0	7.52	0.67	1.67495	32	82

Tabelle 2: Bindungsenergien

Kern	B [MeV]
$^{210}_{\text{Po}}$	1645.24
$^{210}_{\text{Bi}}$	1644.86
$^{210}_{\text{Pb}}$	1645.58
$^{209}_{\text{Bi}}$	1640.26
$^{209}_{\text{Pb}}$	1640.40
$^{208}_{\text{Bi}}$	1632.80
$^{208}_{\text{Pb}}$	1636.46
$^{208}_{\text{Tl}}$	1632.25
$^{207}_{\text{Pb}}$	1629.09
$^{207}_{\text{Tl}}$	1628.45
$^{206}_{\text{Pb}}$	1622.35
$^{206}_{\text{Tl}}$	1621.61
$^{206}_{\text{Hg}}$	1621.08

Tabelle 3: Chemische Potentiale [MeV]

μ_n^{+1}	μ_n^{-1}	μ_p^{+1}	μ_p^{-1}	μ_{pn}^{σ}	μ_{pn}^{σ}
-3.94	-7.37	-3.80	-8.01	4.21	3.66
μ_n^{+2}	μ_n^{-2}	μ_p^{+2}	μ_p^{-2}	μ_{pn}^{+2}	μ_{pn}^{-2}
-9.12	-14.11	-8.78	-15.38	-8.40	-14.85

Tabelle 4: Experimentelle Einteilchenenergien $\varepsilon_{\nu, \tau, t}$ und die entsprechenden experimentellen Anregungsenergien $\omega_{\nu, \tau, t}$

Quantenzahlen		$\varepsilon_{\nu, \tau, t}$ [MeV]	$\omega_{\nu, \tau, t}$ [MeV]
TINLK			
π 3 $p_{1/2}$	11311	-0.17	3.63
π 3 $p_{3/2}$	11312	-0.68	3.12
π 2 $f_{5/2}$	11233	-0.98	2.82
π 1 $i_{13/2}$	11167	-2.19	1.61
π 2 $f_{7/2}$	11234	-2.90	0.90
π 1 $h_{9/2}$	11155	-3.80	0.00
<hr/>			
π^{-1} 3 $s_{1/2}$	01301	-8.01	0.00
π^{-1} 2 $d_{3/2}$	01222	-8.36	0.35
π^{-1} 1 $h_{11/2}$	01156	-9.35	1.34
π^{-1} 2 $d_{5/2}$	01223	-9.68	1.67
π^{-1} 1 $g_{7/2}$	01144	-11.48	3.47
<hr/>			
ν 3 $d_{3/2}$	10322	-1.40	2.54
ν 2 $g_{7/2}$	10244	-1.45	2.49
ν 4 $s_{1/2}$	10401	-1.91	2.03
ν 1 $j_{15/2}$	10178	-2.52	1.42
ν 3 $d_{5/2}$	10323	-2.37	1.57
ν 1 $i_{11/2}$	10166	-3.16	0.78
ν 2 $g_{9/2}$	10245	-3.94	0.00
<hr/>			
ν^{-1} 3 $p_{1/2}$	00311	-7.37	0.00
ν^{-1} 2 $f_{5/2}$	00233	-7.94	0.57
ν^{-1} 3 $p_{3/2}$	00312	-8.27	0.90
ν^{-1} 1 $i_{13/2}$	00167	-9.00	1.63
ν^{-1} 2 $f_{7/2}$	00234	-9.71	2.34
ν^{-1} 1 $h_{9/2}$	00155	-10.85	3.48

Tabelle 5: Parameter der $(\bar{\pi}+\zeta)$ -Austauschwechselwirkung

Parameter	numerischer Wert	Referenz
μ_{π}	0.6995fm^{-1}	arithmet. Mittel der Pionenmassen nach (B-SBC80)
μ_{ζ}	3.9021fm^{-1}	$m_{\zeta}c^2 = 770\text{ MeV}$ (B-SBC80)
f_{π}^2	0.081	(BM79), (SKW80), (BSW81)
f_{ζ}^2	4.86	(HP75) gem. (AB77), (BSW81)
Λ_{π}	6fm^{-1} (1.2GeV)	(Wei77), (BSW81)
Λ_{ζ}	10fm^{-1} (2.0GeV)	(BSW81)
g_{σ}	3.93fm^{-1}	(B ² OW77)
$g_{\pi} = \frac{4\pi}{3} \frac{f_{\pi}^2}{\mu_{\pi}^2} \frac{t_c}{\tau_c}$	0.3545	
$-g_{\zeta}$	-0.6835	

Tabelle 6: Parameter der OBE-Matrizen

a) $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$

	"KANZO1" $\mu_1 = 0.71\text{fm}^{-1}$	"KANZO2" $\mu_2 = 2.5\text{fm}^{-1}$	"KANZO3" $\mu_3 = 4.0\text{fm}^{-1}$
F	0.0	-5.78855466	8.09739702
F'	0.0	1.03340435	-1.21855042
G	0.0	0.42607852	-0.72859158
G'	0.34408060	-0.74446114	2.12204098
-H	0.0	0.15266313	-0.91897653
-H'	0.34408060	-0.96288016	2.84005039

b) $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$

	"KANZO1" $\mu_1 = 0.71\text{fm}^{-1}$	"KANZO2" $\mu_2 = 2.5\text{fm}^{-1}$	"KANZO3" $\mu_3 = 4.0\text{fm}^{-1}$
F	0.0	-6.12887324	8.35490583
F'	0.0	1.27868479	-1.43126772
G	0.0	0.34071150	-0.66035453
G'	0.34408060	-0.67550699	2.06910951
-H	0.0	0.36880036	-2.13097459
-H'	0.34408660	-1.08023158	3.52888557

Abschneideimpuls $\Lambda = 4.8649821\text{fm}^{-1} \approx 960\text{ MeV}$ in beiden Fällen

Tabelle 7: Einige Konstanten und Parameter

	numerischer Wert	Quelle
$\hbar c$	197.32585 MeVfm	B-SBC80
e	4.803242 esu	B-SBC80
γ	$1.6021892 \cdot 10^{-6} \text{ erg/MeV}$	B-SBC80
b	2.43 fm	G1. (3.4)
C_0	.386.0 MeVfm ³	(Con84, eq. (3.11))

Tabelle 8: Differenz ($E_{\text{theor}} - E_{\text{exp}}$) für die Grundzustände
("RPA & $G_{\pi+\delta}$ ") [keV]

^{206}Pb	^{210}Pb	^{206}Hg	^{210}Hg	^{206}Tl	^{210}Bi
300	620	-20	734	-182	363

Tabelle 9: 3_1^- in gg-Kernen [MeV]

	^{206}Pb	^{210}Pb	^{210}Po
exp	2.65	1.85	2.39
RPA & $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$	4.31	-	-
RPA & $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$	-	2.38	3.07
RPA & $G_{\pi+\delta}$	4.48	2.57	3.24

Tabelle 10.1: Die beiden größten γ -Amplituden (mit zugehörigen Konfigurationen) für die tiefstliegenden Zustände in den Zweiteilchenkernen

^{210}Po	$G_{\pi+\rho} + V_C$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})} + V_C$		
	TINLK	TINLK	γ	TINLK	TINLK	γ
0^+	01156	01156	0.122	01156	01156	0.209
	01222	01222	0.045	01222	01222	0.114
2^+	01156	01156	0.032	01156	01156	0.040
	01223	01301	0.009	01223	01301	0.014
^{210}Bi	$G_{\pi+\rho}$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$		
	TINLK	TINLK	γ	TINLK	TINLK	γ
0^-	01223	00233	0.029	01223	00233	0.070
	01144	00234	0.023	01144	00234	-0.051
1^-	01144	00155	-0.022	01144	00234	0.042
	01156	00167	-0.015	01144	00155	-0.023
2^-	01223	00155	0.015	01144	00234	-0.027
	01144	00233	-0.012	01144	00312	-0.013
^{210}Pb	$G_{\pi+\rho}$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$		
	TINLK	TINLK	γ	TINLK	TINLK	γ
0^+	00233	00233	0.104	00233	00233	0.210
	00167	00167	0.073	00167	00167	-0.201
2^+	00233	00233	0.022	00233	00311	0.030
	00233	00311	-0.019	00233	00233	0.030

Tabelle 10.2: Die beiden größten Y-Amplituden (mit zugehörigen Konfigurationen) für die tiefstliegenden Zustände in den Zweilochkernen

^{206}Pb	$G_{\pi+\rho}$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$		
	TINLK	TINLK	Y	TINLK	TINLK	Y
0^+	10245	10245	-0.078	10245	10245	-0.187
	10166	10166	-0.046	10166	10166	-0.138
2^+	10245	10323	-0.027	10245	10245	-0.041
	10245	10245	-0.026	10245	10323	-0.037
^{206}Tl	$G_{\pi+\rho}$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$		
	TINLK	TINLK	Y	TINLK	TINLK	Y
0^-	11234	10244	-0.047	11155	10245	0.085
	11311	10401	0.033	11233	10323	-0.051
1^-	11312	10322	0.020	11312	10322	-0.028
	11234	10244	0.012	11234	10244	-0.024
2^-	11312	10401	-0.019	11312	10244	0.029
	11312	10244	-0.019	11234	10244	0.022
^{206}Hg	$G_{\pi+\rho}+V_c$			$G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}+V_c$		
	TINLK	TINLK	Y	TINLK	TINLK	Y
0^+	11234	11234	0.043	11155	11155	0.105
	11155	11155	0.036	11234	11234	0.101

Tab. 11.1

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	1	1	11155	11155	0.923	1.180	11167	11167	-0.313	4.400	0.734
2	1	1	11155	11155	-0.994	1.180	11167	11167	0.100	4.400	1.277
4	1	1	11155	11155	0.998	1.180	11167	11167	-0.052	4.400	1.348
6	1	1	11155	11155	-0.999	1.180	11167	11167	0.032	4.400	1.382
8	1	1	11155	11155	-1.000	1.180	11167	11167	0.021	4.400	1.424
1	1	1	11155	11234	-0.999	2.080	11234	11233	0.036	4.900	2.114
7	1	1	11155	11234	1.000	2.080	11155	11233	0.025	4.000	2.195
5	1	1	11155	11234	-1.000	2.080	11155	11233	-0.024	4.000	2.208
3	1	1	11155	11234	0.999	2.080	11155	11233	0.022	4.000	2.217
9	1	2	11155	11234	-1.000	2.080	11167	11167	0.023	4.400	2.223
6	1	2	11155	11234	0.999	2.080	11155	11233	0.026	4.000	2.325
4	1	2	11155	11234	0.999	2.080	11155	11233	0.032	4.000	2.400
2	1	2	11155	11234	0.997	2.080	11155	11233	0.075	4.000	2.531
11	-1	1	11155	11167	1.000	2.790	11155	11167	1.000	2.790	2.597

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	1	1	11155	11155	0.903	1.180	11167	11167	-0.386	4.400	-0.330
2	1	1	11155	11155	-0.990	1.180	11167	11167	0.118	4.400	1.061
4	1	1	11155	11155	0.998	1.180	11167	11167	-0.059	4.400	1.235
6	1	1	11155	11155	0.999	1.180	11167	11167	-0.037	4.400	1.299
8	1	1	11155	11155	-1.000	1.180	11167	11167	0.024	4.400	1.359
1	1	1	11155	11234	-0.999	2.080	11234	11233	0.037	4.900	1.972
8	1	2	11155	11234	-0.999	2.080	11167	11167	0.029	4.400	2.071
3	1	1	11155	11234	0.999	2.080	11155	11312	0.030	4.300	2.156
5	1	1	11155	11234	-1.000	2.080	11155	11233	-0.020	4.000	2.173
7	1	1	11155	11234	1.000	2.080	11155	11233	0.016	4.000	2.173
6	1	2	11155	11234	-0.998	2.080	11155	11233	-0.037	4.000	2.246
0	1	2	11234	11234	-0.918	2.980	11155	11155	0.337	1.180	2.277
4	1	2	11155	11234	-0.998	2.080	11155	11233	-0.045	4.000	2.322
2	1	2	11155	11234	0.993	2.080	11155	11233	0.107	4.000	2.391
11	-1	1	11155	11167	1.000	2.790	11155	11167	1.000	2.790	2.395

Tab. 11.2

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	1	1	01301	01301	-0.974	0.640	01222	01222	-0.190	1.340	-0.021
1	1	1	01222	01301	0.999	0.990	01223	01222	-0.052	2.660	1.100
0	1	2	01222	01222	0.903	1.340	01223	01223	0.309	3.980	1.120
2	1	1	01222	01301	0.959	0.990	01223	01301	0.204	2.310	1.170
2	1	2	01222	01222	0.970	1.340	01222	01301	-0.192	0.990	1.523
5	-1	1	01156	01301	-0.997	1.980	01156	01222	0.071	2.330	2.130

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	1	1	01301	01301	-0.903	0.640	01222	01222	-0.350	1.340	-0.575
0	1	2	01222	01222	-0.792	1.340	01301	01301	0.432	0.640	0.586
2	1	1	01222	01301	-0.919	0.990	01223	01301	-0.257	2.310	0.953
1	1	1	01222	01301	0.999	0.990	01223	01222	-0.051	2.660	1.016
2	1	2	01222	01222	0.938	1.340	01222	01301	-0.307	0.990	1.420
5	-1	1	01156	01301	-0.985	1.980	01156	01222	0.163	2.330	2.050

Tab. 11.3

J	PAR	#	TJNLK	TJNLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TINLK	TJNLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	1	1	10245	10245	-0.933	1.240	10166	10166	-0.297	2.800	0.620
2	1	1	10245	10245	0.995	1.240	10245	10323	0.056	2.810	1.111
4	1	1	10245	10245	-0.998	1.240	10245	10244	0.035	3.730	1.185
6	1	1	10245	10245	-0.999	1.240	10245	10244	0.037	3.730	1.217
8	1	1	10245	10245	-0.998	1.240	10245	10244	0.054	3.730	1.240
1	1	1	10245	10166	0.999	2.020	10245	10244	-0.033	3.730	1.824
10	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10178	10178	-0.021	4.080	1.918
9	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10166	10244	0.012	4.510	1.939
3	1	1	10245	10166	-0.999	2.020	10245	10322	0.025	3.780	1.953
7	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10166	10244	0.014	4.510	1.954
5	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10166	10244	0.015	4.510	1.958
8	1	2	10245	10166	0.999	2.020	10166	10323	-0.027	3.590	2.026
6	1	2	10245	10166	-0.999	2.020	10245	10322	-0.026	3.780	2.071
0	1	2	10166	10166	-0.809	2.800	10178	10178	0.480	4.080	2.083
4	1	2	10245	10166	0.999	2.020	10166	10244	-0.024	4.510	2.123
2	1	2	10245	10166	0.995	2.020	10166	10244	-0.058	4.510	2.214

J	PAR	#	TJNLK	TJNLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TINLK	TJNLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	1	1	10245	10245	-0.839	1.240	10166	10166	-0.490	2.800	-0.379
2	1	1	10245	10245	-0.986	1.240	10245	10323	-0.101	2.810	0.954
4	1	1	10245	10245	-0.997	1.240	10245	10323	-0.041	2.810	1.107
6	1	1	10245	10245	0.998	1.240	10245	10244	-0.046	3.730	1.160
8	1	1	10245	10245	-0.997	1.240	10245	10244	0.072	3.730	1.190
0	1	2	10166	10166	-0.707	2.800	10245	10245	0.566	1.240	1.542
1	1	1	10245	10166	-0.999	2.020	10245	10244	0.041	3.730	1.692
10	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10178	10178	-0.027	4.080	1.785
3	1	1	10245	10166	0.999	2.020	10166	10323	0.033	3.590	1.890
9	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10166	10244	0.007	4.510	1.921
5	1	1	10245	10166	0.999	2.020	10166	10323	0.021	3.590	1.921
7	1	1	10245	10166	-1.000	2.020	10166	10323	0.017	3.590	1.927
8	1	2	10245	10166	0.998	2.020	10166	10323	-0.052	3.590	1.960
6	1	2	10245	10166	0.998	2.020	10245	10322	0.025	3.780	2.015
4	1	2	10245	10166	0.998	2.020	10166	10166	-0.033	2.800	2.056
2	1	2	10245	10166	0.982	2.020	10166	10166	-0.117	2.800	2.089

Tab. 11.4

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	1	1	00311	00311	0.895	0.630	00312	00312	0.355	2.430	0.300
2	1	1	00233	00311	0.893	1.200	00312	00311	-0.376	1.530	1.055
3	1	1	00233	00311	0.996	1.200	00312	00233	0.080	2.100	1.190
2	1	2	00312	00311	-0.884	1.530	00233	00311	-0.401	1.200	1.209
0	1	2	00233	00233	-0.889	1.770	00311	00311	0.334	0.630	1.313
1	1	1	00312	00311	-0.997	1.530	00312	00233	0.079	2.100	1.431
2	1	3	00233	00233	0.978	1.770	00312	00311	0.150	1.530	1.703
4	1	1	00233	00233	0.965	1.770	00312	00233	-0.229	2.100	1.751
4	1	2	00312	00233	0.929	2.100	00233	00233	0.253	1.770	1.961
1	1	2	00312	00233	-0.995	2.100	00312	00311	-0.079	1.530	1.975
3	1	2	00312	00233	-0.997	2.100	00233	00311	0.080	1.200	2.021
2	1	4	00312	00233	0.980	2.100	00233	00311	0.134	1.200	2.192
7	-1	1	00167	00311	-0.997	2.260	00167	00312	0.069	3.160	2.206
0	1	3	00312	00312	-0.922	2.430	00311	00311	0.298	0.630	2.241
6	-1	1	00167	00311	0.998	2.260	00167	00233	0.053	2.830	2.262
2	1	5	00312	00312	0.969	2.430	00312	00311	0.232	1.530	2.411

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	1	1	00311	00311	0.749	0.630	00233	00233	0.456	1.770	-0.291
2	1	1	00233	00311	0.784	1.200	00312	00311	-0.516	1.530	0.860
0	1	2	00233	00233	-0.752	1.770	00311	00311	0.578	0.630	0.894
2	1	2	00312	00311	0.796	1.530	00233	00311	0.558	1.200	1.071
2	1	1	00233	00311	0.998	1.200	00312	00233	0.051	2.100	1.139
1	1	1	00312	00311	-0.996	1.530	00312	00233	0.093	2.100	1.366
2	1	3	00233	00233	-0.962	1.770	00312	00311	-0.184	1.530	1.613
4	1	1	00233	00233	-0.869	1.770	00312	00233	0.443	2.100	1.659
4	1	2	00312	00233	-0.837	2.100	00233	00233	-0.486	1.770	1.845
1	1	2	00312	00233	0.994	2.100	00312	00311	0.094	1.530	1.897
2	1	2	00312	00233	0.999	2.100	00233	00311	-0.051	1.200	1.986
0	1	3	00312	00312	-0.896	2.430	00311	00311	0.340	0.630	2.083
2	1	4	00312	00233	0.972	2.100	00233	00311	0.169	1.200	2.120
7	-1	1	00167	00311	0.988	2.260	00167	00233	0.106	2.830	2.142
6	-1	1	00167	00311	0.996	2.260	00167	00233	0.084	2.830	2.226
2	1	5	00312	00312	-0.962	2.430	00312	00311	-0.255	1.530	2.315

Tab. 11.5

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TJNLK	TINLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	-1	1	11155	10245	0.996	0.660	11234	10244	-0.088	4.050	0.363
2	-1	1	11155	10245	-0.989	0.660	11234	10166	-0.126	2.340	0.380
1	-1	1	11155	10245	-0.986	0.660	11234	10245	0.147	1.560	0.488
4	-1	1	11155	10245	0.996	0.660	11155	10166	0.053	1.440	0.533
3	-1	1	11155	10245	-0.991	0.660	11234	10245	0.096	1.560	0.556
7	-1	1	11155	10245	-0.993	0.660	11234	10245	0.079	1.560	0.562
9	-1	1	11155	10245	0.999	0.660	11155	10166	-0.038	1.440	0.565
5	-1	1	11155	10245	-0.993	0.660	11234	10245	0.081	1.560	0.570
6	-1	1	11155	10245	-0.996	0.660	11155	10244	0.049	3.150	0.598
8	-1	1	11155	10245	-0.995	0.660	11155	10244	0.083	3.150	0.638
10	-1	1	11155	10166	-1.000	1.440	11167	10178	0.017	3.690	1.028
8	-1	2	11234	10245	0.877	1.560	11155	10166	0.477	1.440	1.125

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETT(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETT(KONF2)	E
0	-1	1	11155	10245	0.988	0.660	11234	10244	-0.167	4.050	0.008
1	-1	1	11155	10245	-0.984	0.660	11234	10245	0.152	1.560	0.068
2	-1	1	11155	10245	0.990	0.660	11234	10166	0.095	2.340	0.268
9	-1	1	11155	10245	-0.999	0.660	11155	10166	0.033	1.440	0.336
3	-1	1	11155	10245	-0.985	0.660	11234	10245	0.104	1.560	0.363
7	-1	1	11155	10245	-0.991	0.660	11234	10245	0.074	1.560	0.441
5	-1	1	11155	10245	-0.990	0.660	11234	10245	0.083	1.560	0.442
4	-1	1	11155	10245	0.995	0.660	11155	10166	0.056	1.440	0.455
6	-1	1	11155	10245	0.995	0.660	11155	10244	-0.060	3.150	0.527
8	-1	1	11155	10245	0.993	0.660	11155	10244	-0.106	3.150	0.570
10	-1	1	11155	10166	-1.000	1.440	11167	10178	0.006	3.690	0.598
8	-1	2	11234	10245	-0.920	1.560	11155	10166	-0.389	1.440	0.847

Tab. 11.6

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	-1	1	01301	00311	0.954	0.530	01223	00233	0.223	2.770	-0.182
1	-1	1	01301	00311	-0.950	0.530	01222	00311	-0.230	0.880	0.304
2	-1	1	01222	00311	0.864	0.880	01301	00233	0.396	1.100	0.562
2	-1	2	01301	00233	-0.817	1.100	01301	00312	-0.430	1.430	0.851
1	-1	2	01222	00311	0.954	0.880	01301	00311	-0.201	0.530	0.937
3	-1	1	01301	00233	-0.978	1.100	01223	00311	-0.137	2.200	0.983
2	-1	3	01301	00312	0.824	1.430	01222	00311	0.315	0.880	1.080
4	-1	1	01222	00233	-0.979	1.450	01223	00233	-0.200	2.770	1.113
0	-1	2	01222	00312	-0.815	1.780	01223	00233	0.502	2.770	1.236
1	-1	3	01301	00312	-0.811	1.430	01222	00312	0.488	1.780	1.248

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ELL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ELL(KONF2)	E
0	-1	1	01301	00311	-0.920	0.530	01223	00233	-0.298	2.770	-0.615
1	-1	1	01301	00311	0.957	0.530	01222	00311	0.195	0.880	-0.003
2	-1	1	01222	00311	-0.820	0.880	01301	00233	-0.498	1.100	0.284
2	-1	2	01301	00312	0.753	1.430	01301	00233	0.546	1.100	0.577
1	-1	2	01222	00311	0.942	0.880	01301	00312	-0.223	1.430	0.756
3	-1	1	01301	00233	-0.952	1.100	01223	00311	-0.194	2.200	0.773
4	-1	1	01222	00233	-0.977	1.450	01223	00233	-0.205	2.770	0.819
2	-1	3	01301	00312	-0.595	1.430	01301	00233	0.570	1.100	0.864
0	-1	2	01222	00312	0.754	1.780	01223	00233	-0.531	2.770	0.867
1	-1	3	01301	00312	0.834	1.430	01222	00312	-0.378	1.780	0.978

Tab. 11.7

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETL(KONF2)	E
5	1	1	11155	00311	0.999	-0.090	11155	00312	-0.030	0.810	-0.128
4	1	1	11155	00311	0.994	-0.090	11155	00312	-0.083	0.810	-0.010
7	1	1	11155	00233	0.999	0.480	11167	00167	-0.036	3.150	0.390
6	1	1	11155	00233	-0.998	0.480	11155	00312	0.055	0.810	0.461
5	1	2	11155	00233	0.991	0.480	11155	00312	-0.115	0.810	0.482
4	1	2	11155	00233	0.990	0.480	11155	00312	-0.125	0.810	0.510
3	1	1	11155	00233	0.977	0.480	11234	00311	0.184	0.810	0.570
2	1	1	11155	00233	0.992	0.480	11155	00234	-0.082	2.250	0.678
3	1	2	11155	00312	-0.984	0.810	11234	00311	-0.137	0.810	0.770
5	1	3	11155	00312	0.991	0.810	11155	00233	0.114	0.480	0.823
3	1	3	11234	00311	-0.966	0.810	11155	00233	0.198	0.480	0.830
4	1	3	11155	00312	0.959	0.810	11234	00311	0.233	0.810	0.838
6	1	2	11155	00312	-0.996	0.810	11155	00234	0.059	2.250	0.912
4	1	4	11234	00311	0.962	0.810	11155	00312	-0.236	0.810	0.912

- 150 -

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETL(KONF2)	E
5	1	1	11155	00311	0.996	-0.090	11155	00233	-0.075	0.480	-0.039
4	1	1	11155	00311	-0.981	-0.090	11155	00312	0.139	0.810	0.052
6	1	1	11155	00233	-0.994	0.480	11155	00312	0.100	0.810	0.514
7	1	1	11155	00233	-0.999	0.480	11234	00234	0.036	3.150	0.557
5	1	2	11155	00233	-0.995	0.480	11155	00311	-0.075	-0.090	0.579
4	1	2	11155	00233	-0.970	0.480	11155	00312	0.217	0.810	0.597
3	1	1	11155	00233	-0.973	0.480	11155	00312	-0.167	0.810	0.671
5	1	3	11155	00312	-0.997	0.810	11234	00312	-0.038	1.710	0.858
2	1	1	11155	00233	-0.985	0.480	11155	00234	0.141	2.250	0.919
3	1	2	11155	00312	0.977	0.810	11155	00233	-0.155	0.480	0.926
4	1	3	11155	00312	-0.959	0.810	11155	00233	-0.196	0.480	0.926
3	1	3	11234	00311	0.972	0.810	11155	00233	-0.165	0.480	0.951
6	1	2	11155	00312	-0.989	0.810	11155	00234	0.109	2.250	1.014
4	1	4	11234	00311	0.975	0.810	11234	00312	0.141	1.710	1.019

Tab. 11.8

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETL(KONF2)	E
1	1	1	10245	01301	-0.998	-0.140	10166	01301	-0.046	0.640	-0.135
5	1	1	10245	01301	0.951	-0.140	10245	01222	0.304	0.210	-0.039
4	1	2	10245	01222	-0.997	0.210	10166	01301	-0.063	0.640	0.251
5	1	2	10245	01222	-0.948	0.210	10245	01301	0.300	-0.140	0.290
4	1	1	10245	01222	-0.995	0.210	10323	01222	-0.048	1.780	0.310
6	1	1	10245	01222	-0.996	0.210	10245	01222	-0.071	1.530	0.380
5	1	2	10166	01301	-0.992	0.640	10166	01222	0.072	0.990	0.608
6	1	2	10166	01301	0.979	0.640	10166	01222	-0.196	0.990	0.722

J	PAR	#	TINLK	TINLK	X(KONF1)	ETL(KONF1)	TINLK	TINLK	X(KONF2)	ETL(KONF2)	E
1	1	1	10245	01301	-0.988	-0.140	10245	01222	0.135	0.210	-0.036
5	1	1	10245	01301	0.921	-0.140	10245	01222	0.385	0.210	0.027
4	1	2	10245	01222	0.988	0.210	10245	01301	0.130	-0.140	0.321
5	1	2	10245	01222	-0.917	0.210	10245	01301	0.377	-0.140	0.425
4	1	1	10245	01222	-0.989	0.210	10245	01223	0.108	1.530	0.495
6	1	1	10245	01222	-0.993	0.210	10245	01223	-0.110	1.530	0.530
5	1	2	10166	01301	0.990	0.640	10166	01222	0.092	0.990	0.699
6	1	2	10166	01301	-0.946	0.640	10166	01222	0.316	0.990	0.775

Figurenlegende

- Figur 1: Ausschnitt aus der Nuklidkarte in der Bleigegend.
- Figur 2: Zur Definition der chemischen Potentiale der "Magisch ± 1 "-Kerne.
- Figur 3: Zur Summationstransformation (6.35).
- Figur 4: Zur Illustration des Unterschieds zwischen dem $(\pi+\rho)$ -Austauschpotential $V_{\pi+\rho}$ und der entsprechenden G-Matrix $G_{\pi+\rho}$ nach Weise ((Wei77); Parameter s. Tabelle 5). Figur 4.1 = Zentralanteil, Figur 4.2 = Tensoranteil. $u^{(\kappa)}(q)$ wird durch (6.23) definiert, ansonsten vgl. (5.33), (5.51-53); die Abszissen sind zwar verschieden beschriftet, das dargestellte Intervall entspricht aber jeweils dem gleichen Wertebereich des Impulsübertrags q ; die Dreiecke bezeichnen die Funktionswerte an den Gauß-Stützstellen.
- Figuren 5-15: Kernspektren (der jeweils spezifizierten Kerne).
- die erste Spalte von links stellt jeweils die Energien der Schalenmodellkonfigurationen dar, die zweite die der experimentell beobachteten Zustände. Letztere sind (LS78) entnommen; nur die Klassifikation des zweiten beobachteten angeregten Zustands in ^{206}Hg als 5^- -Zustand entstammt (BCL82). Werte in Klammern sind ungesichert.
- Die berechneten Spektren sind durch Angabe der verwendeten Approximation (TDA oder RPA) und der verwendeten Wechselwirkung spezifiziert:
- $G_{\pi+\rho}$ - Kap. 5.2. Tab. 5; $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$ bzw. $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$ - (5.57,58), Tab. 6;
 V_{C} - Kap. 5.5; δ_{attr} : attraktives dichteunabhängiges δ -Potential mit $\alpha_{01}^{\text{ex}} = -1.21 C_0$, δ_{rel} : repulsive dichteunabhängige δ -Potentiale, $\alpha_{01}^{\text{ex}} = +0.30 C_0$ in Verbindung mit $G_{\text{OBE}}^{(\text{in})}$, $\alpha_{01}^{\text{ex}} = +0.13 C_0$ in Verbindung mit $G_{\text{OBE}}^{(\text{surf})}$ ($C_0 = 386 \text{ MeV fm}^3$, Tab. 7; α_{01}^{ex} definiert in Kap. 5.4).

Fig. 4.1

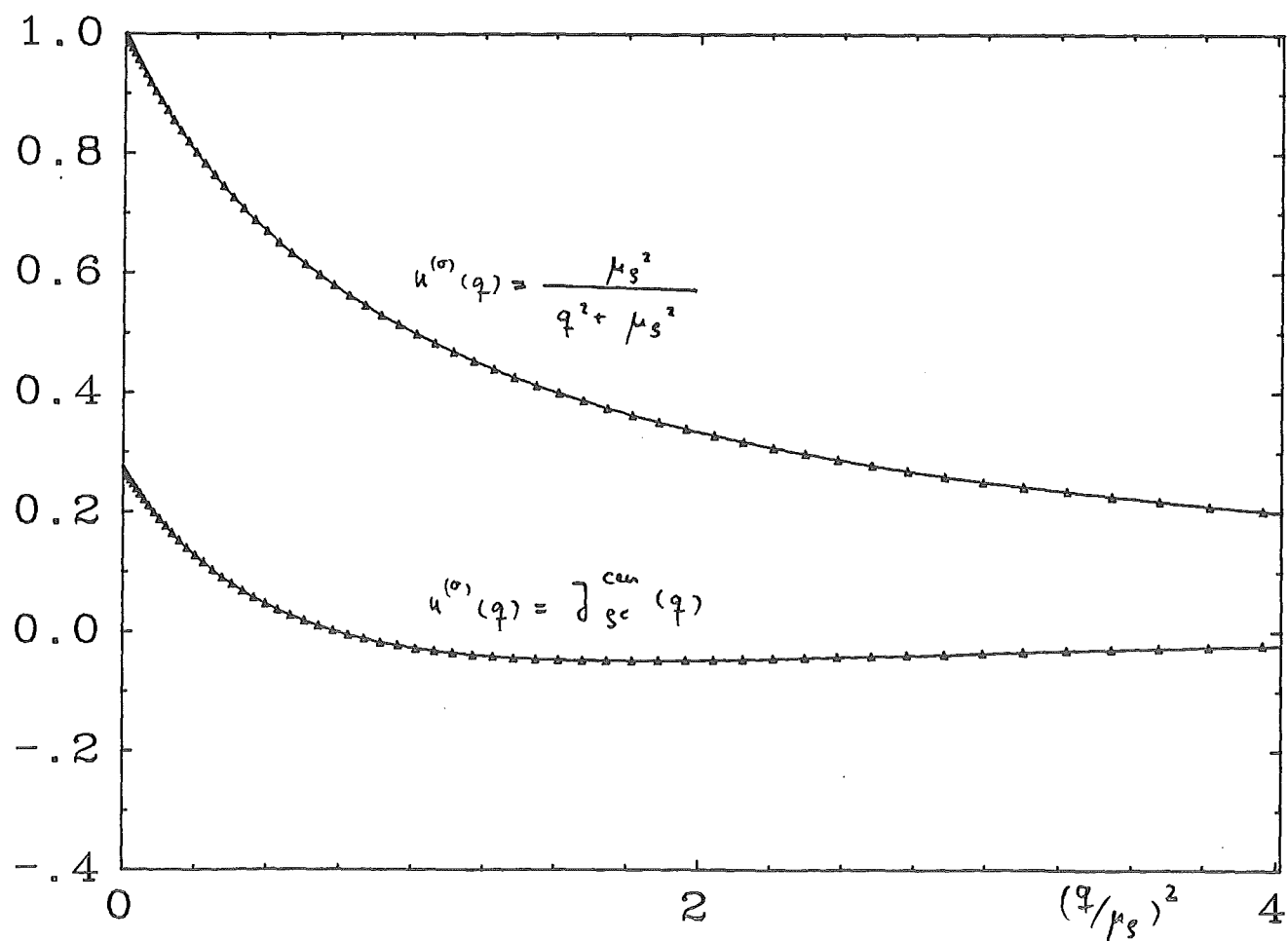
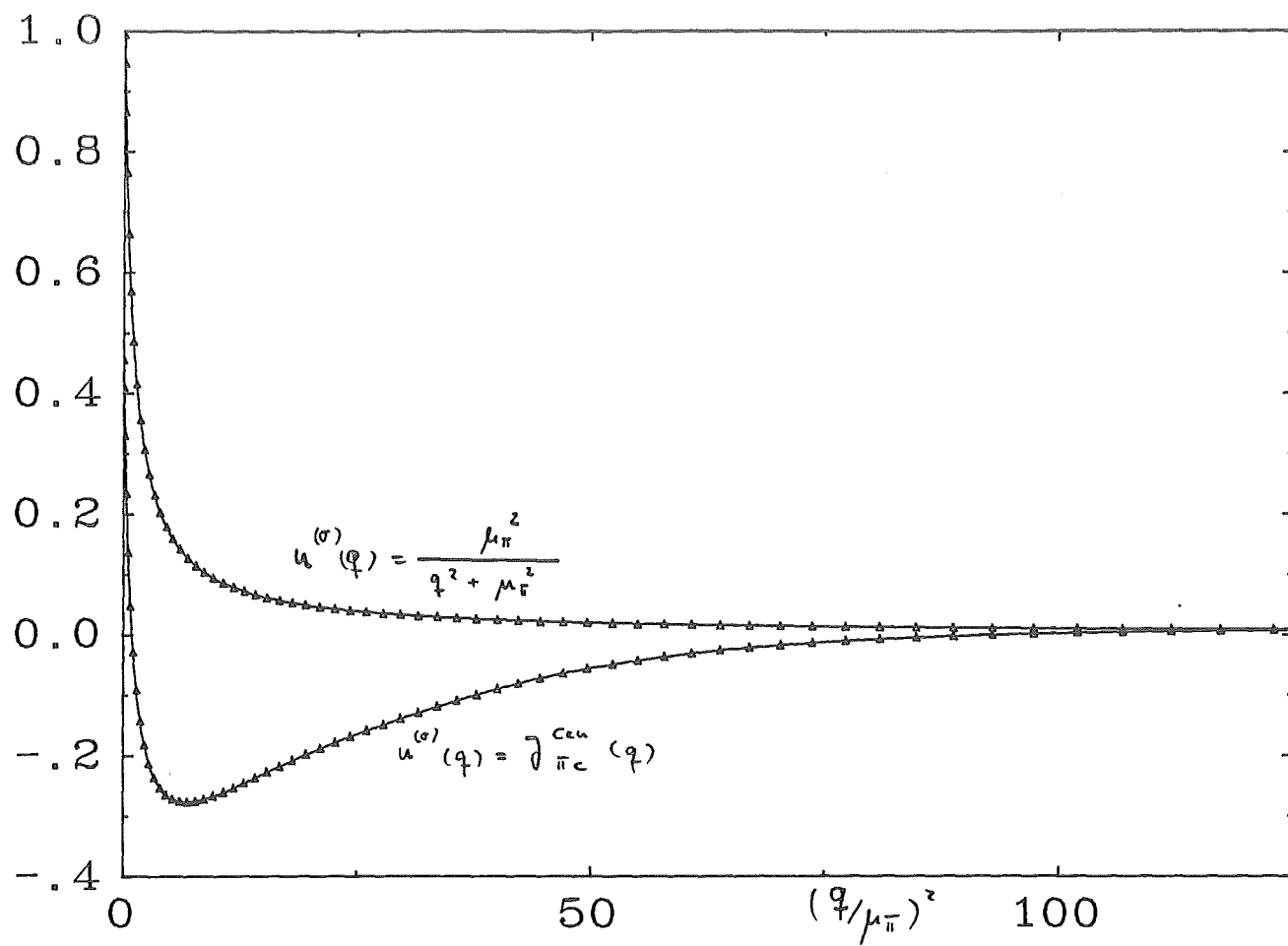


Fig. 4.2

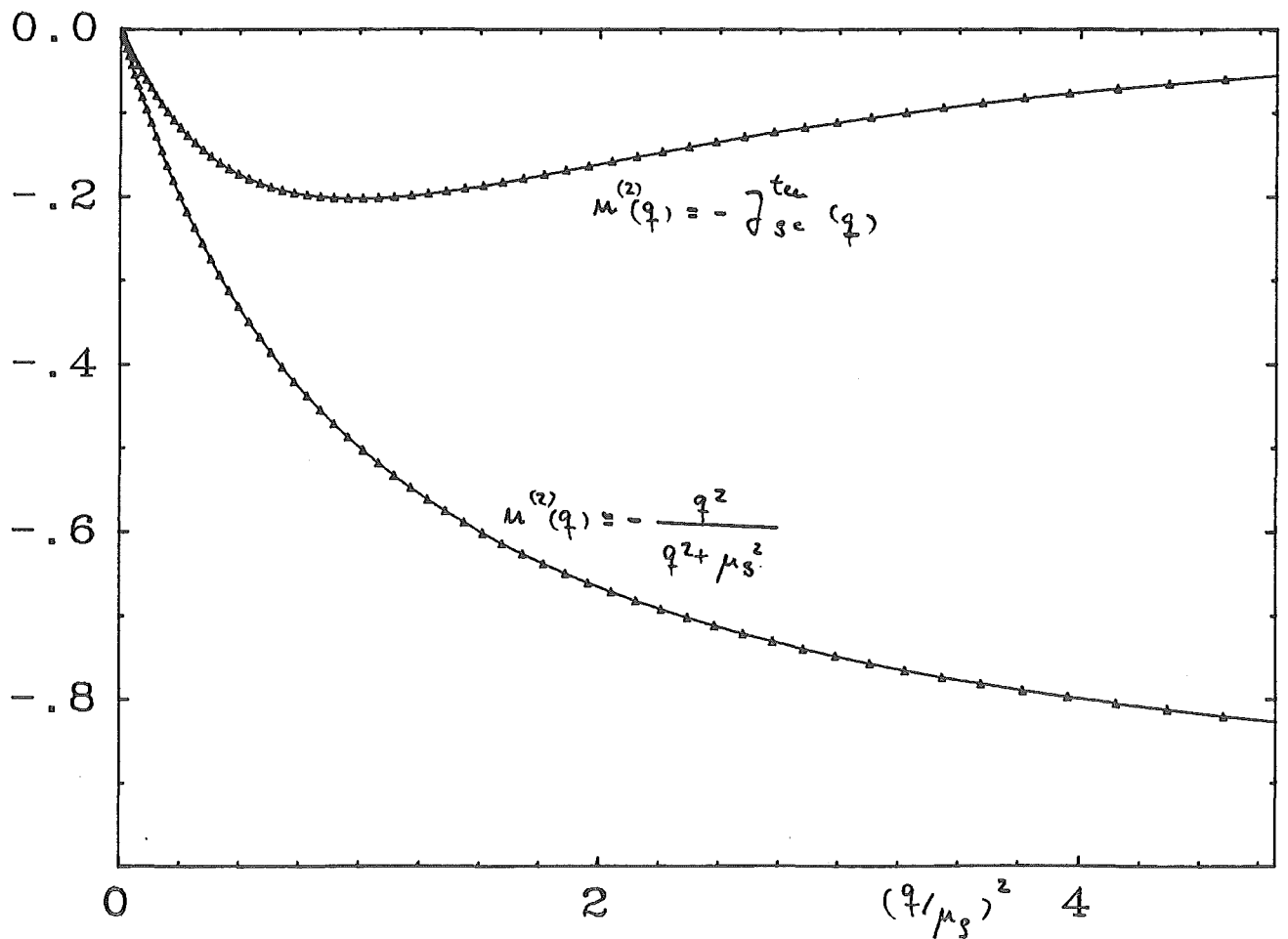
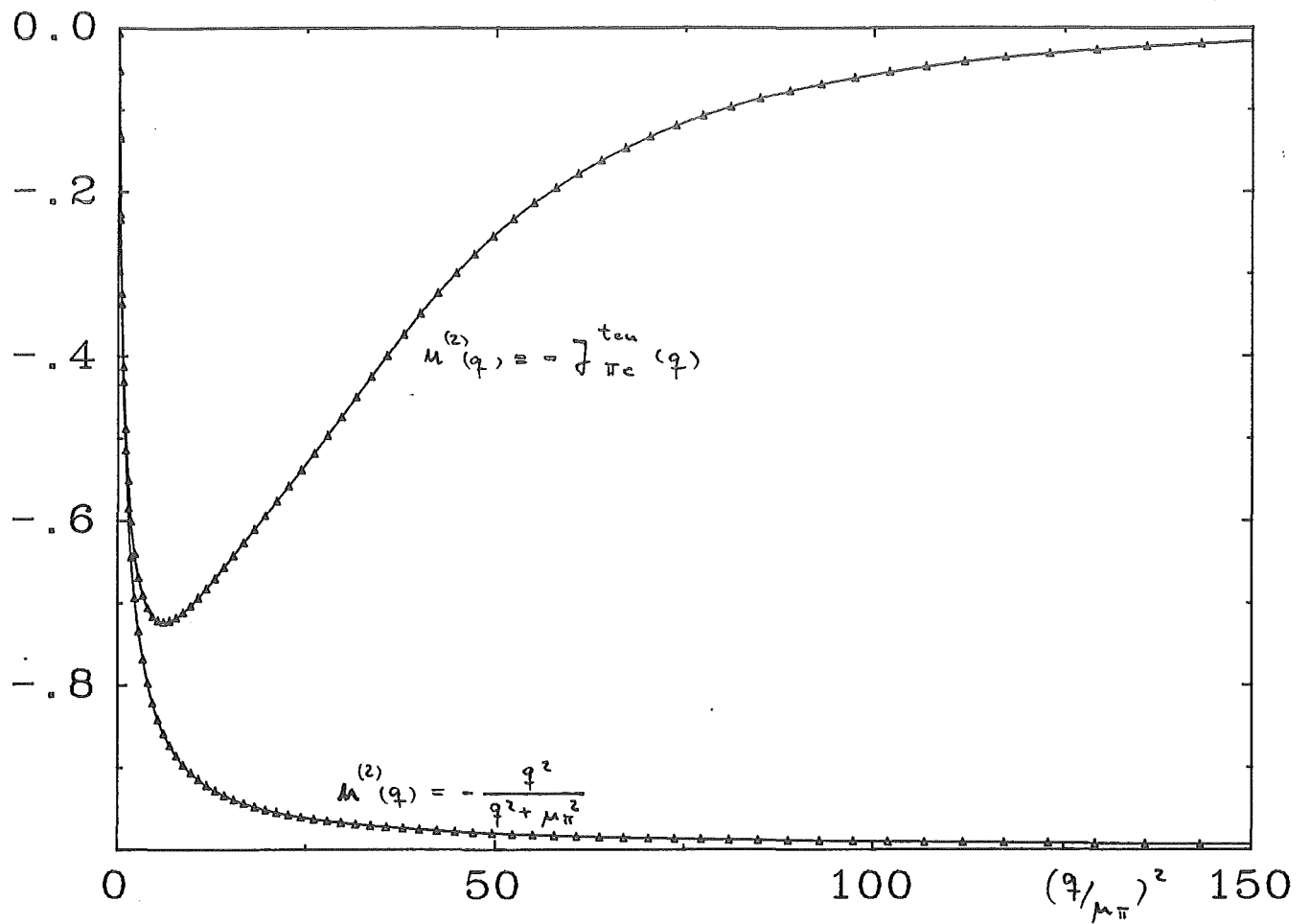


Fig. 5

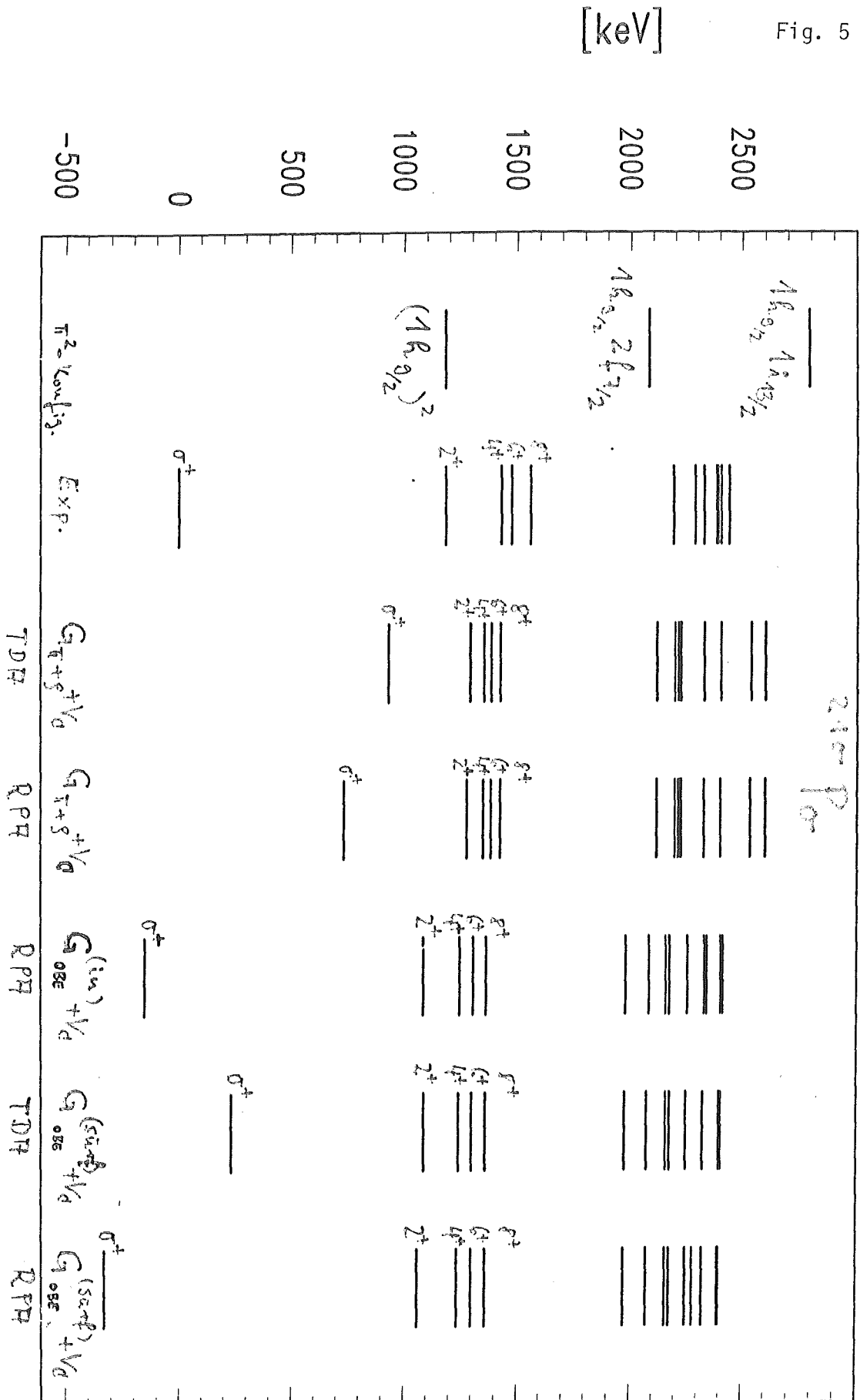


Fig. 6

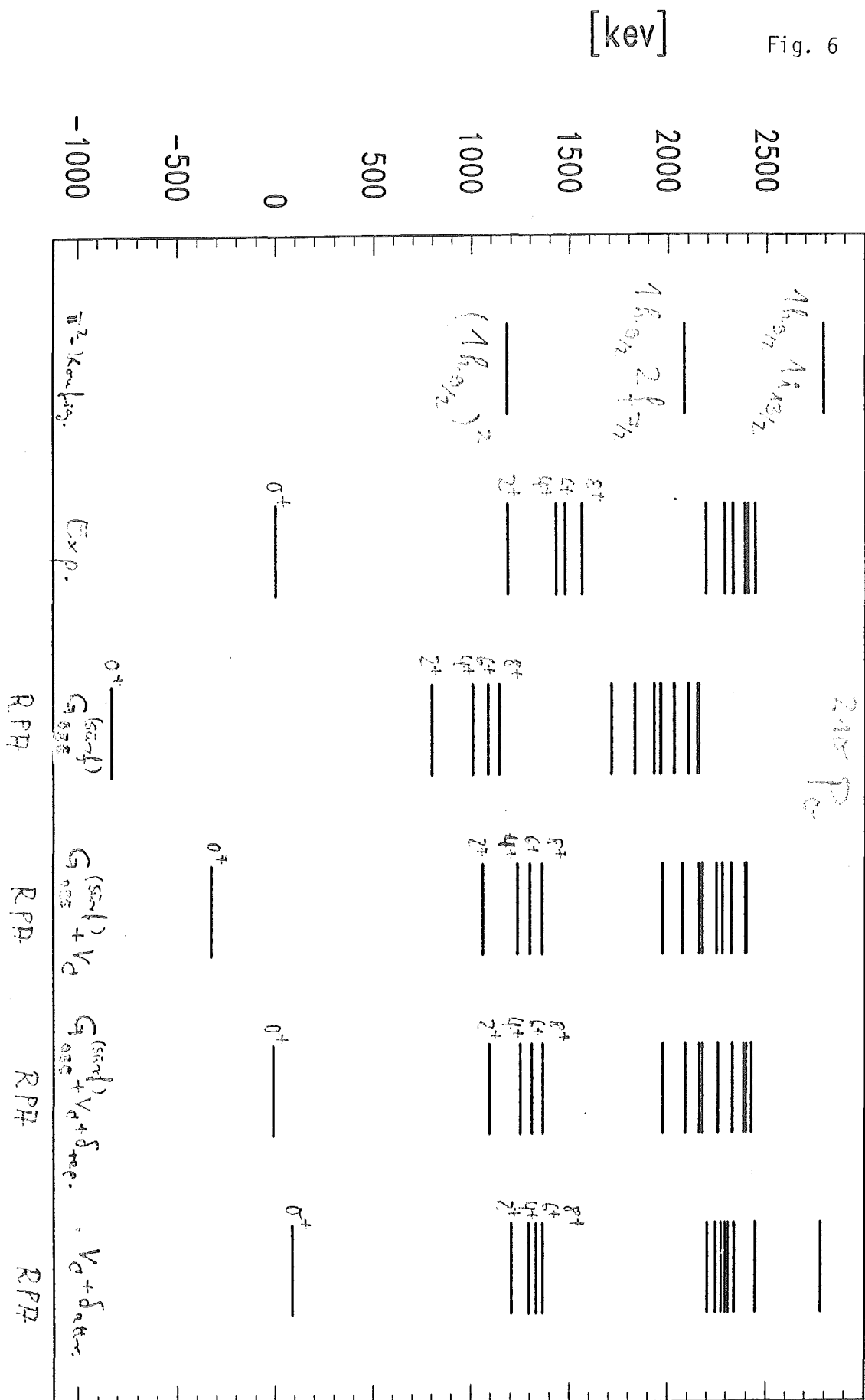
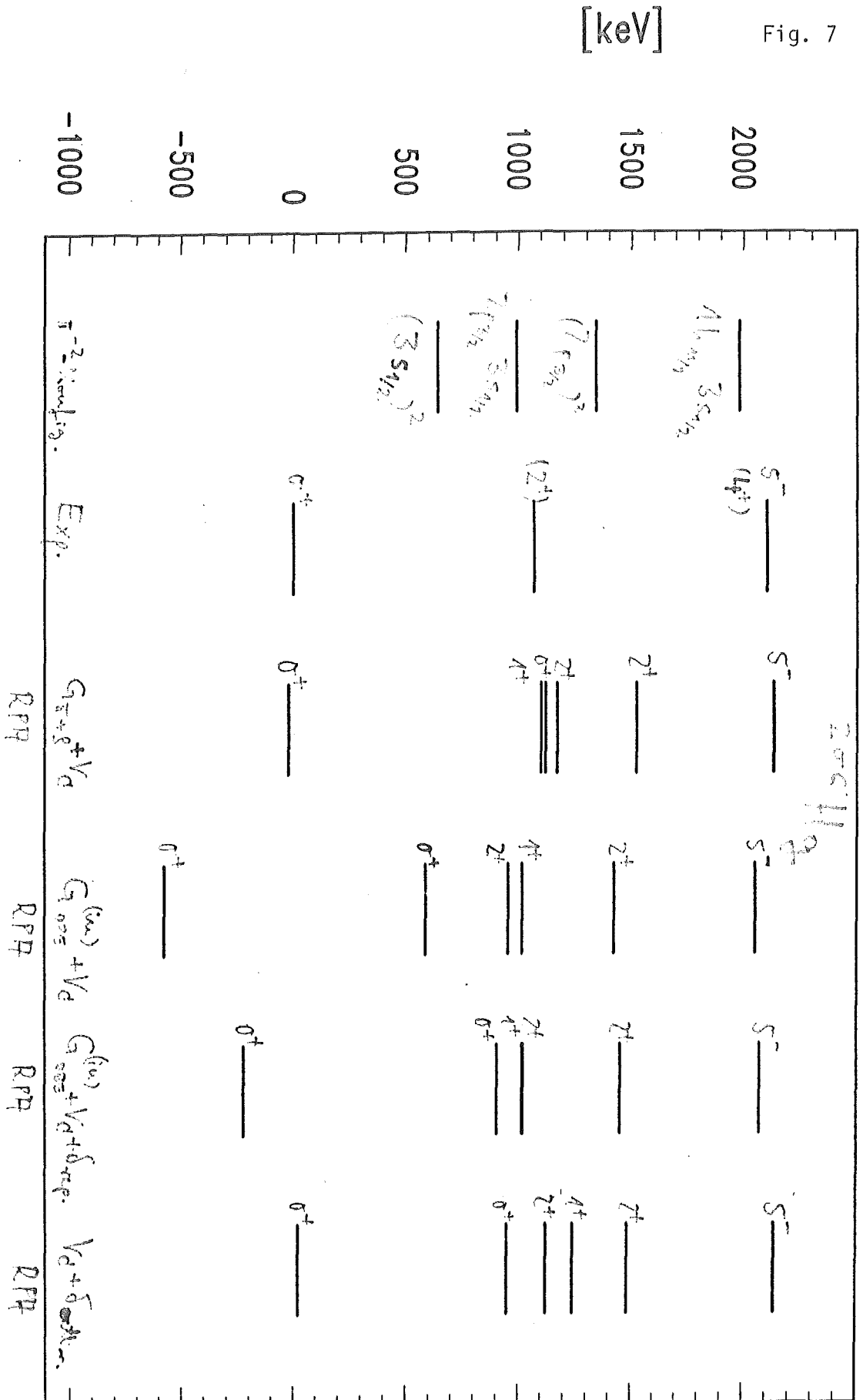
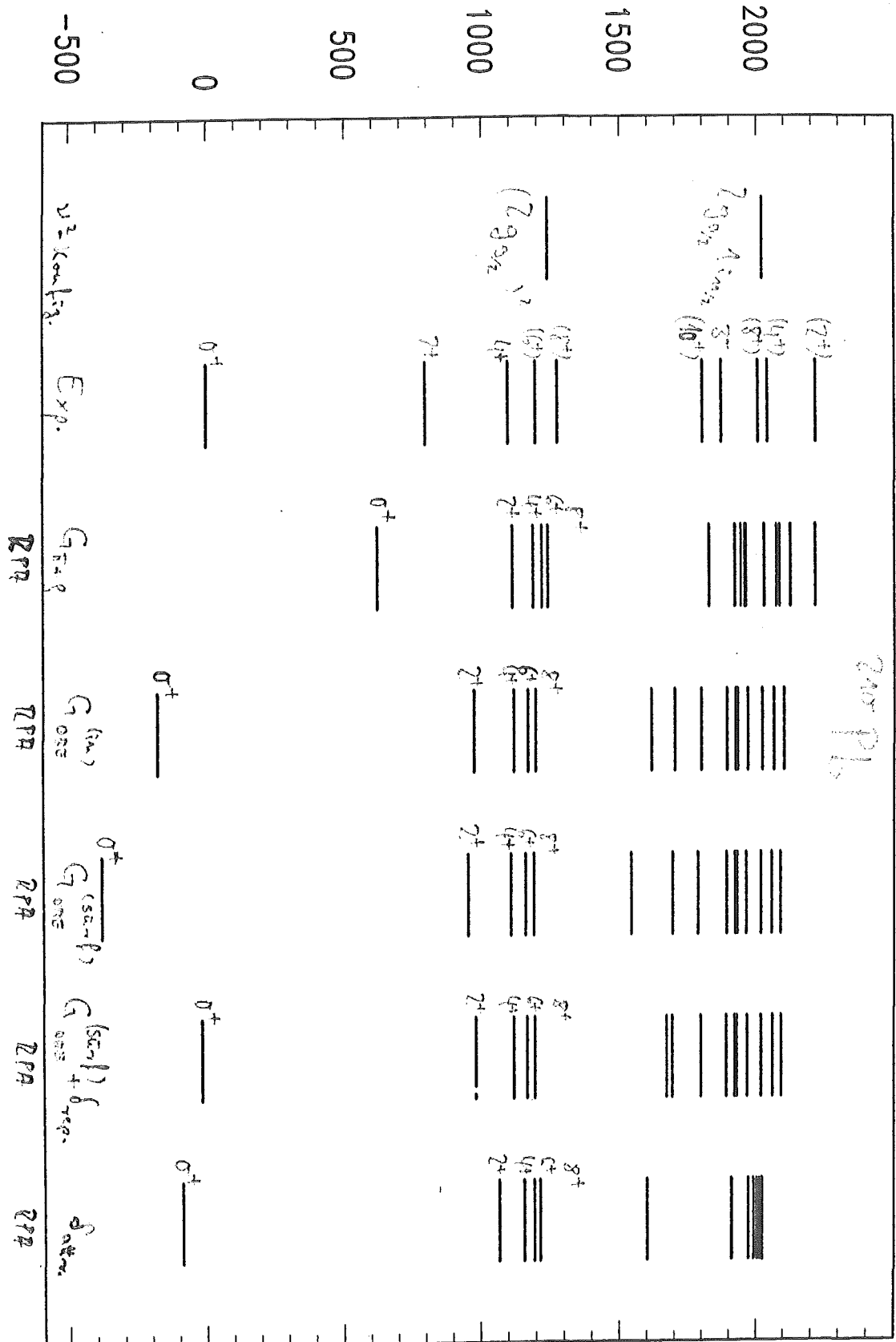


Fig. 7



[keV]

Fig. 8



[keV]

Fig. 10

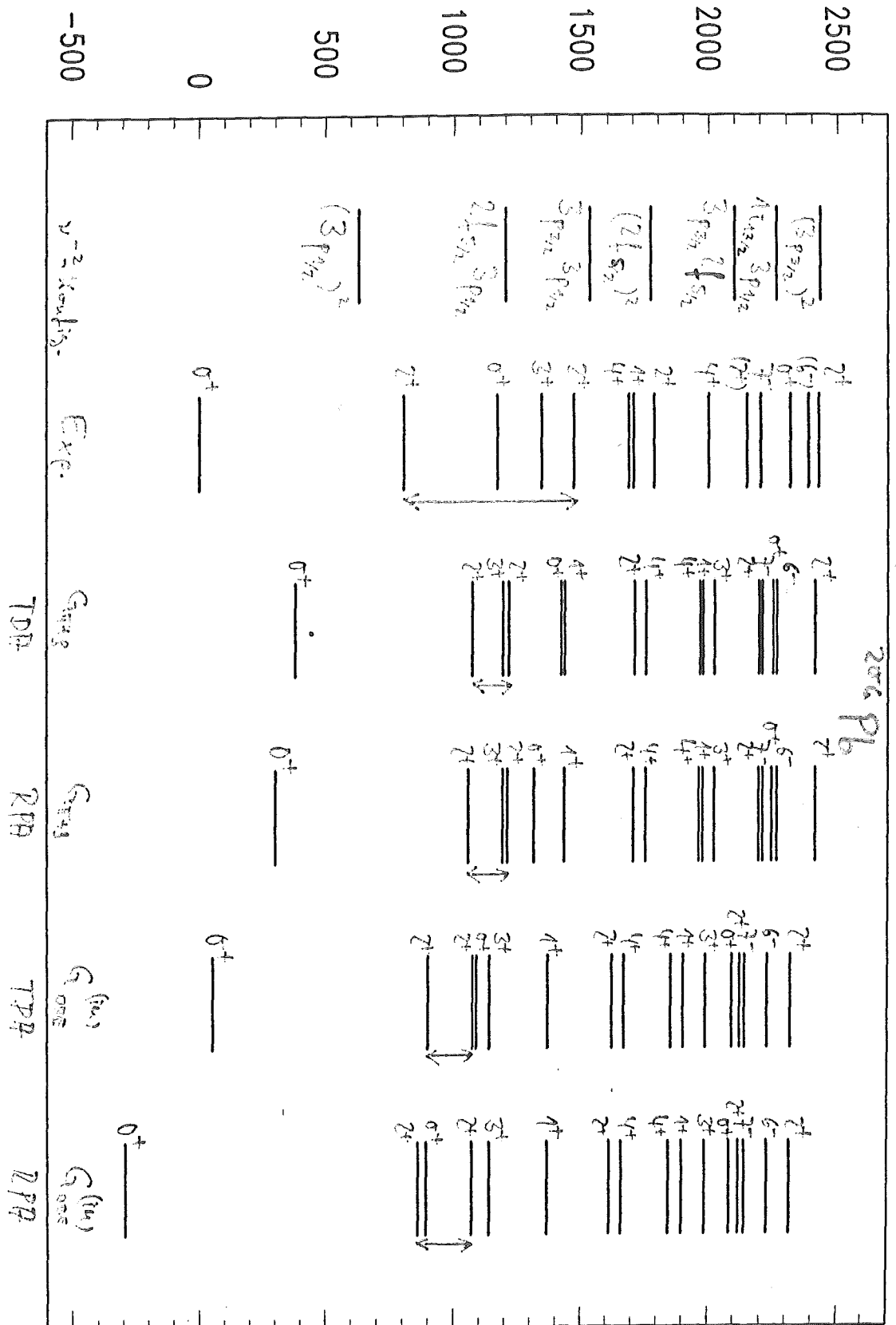
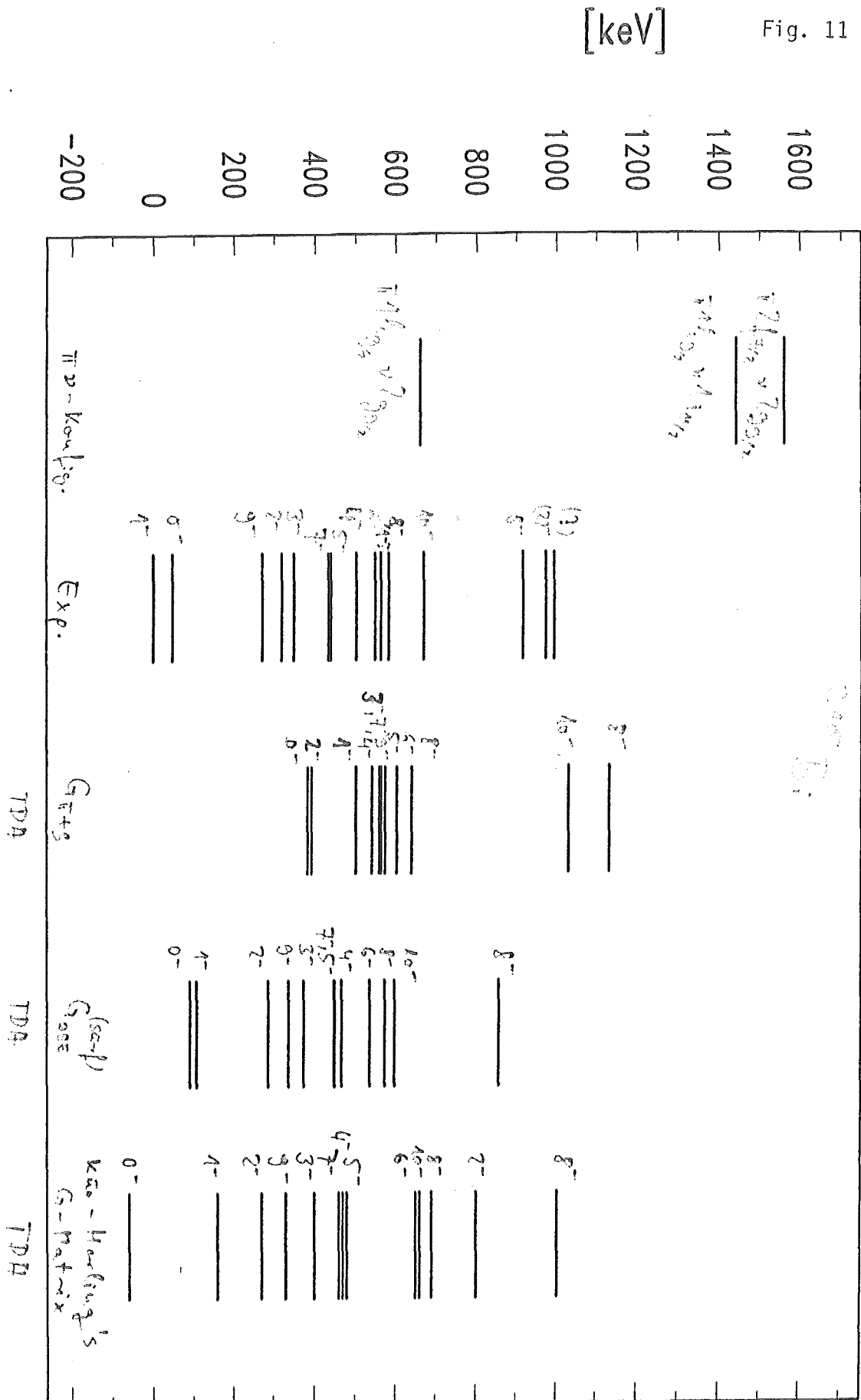
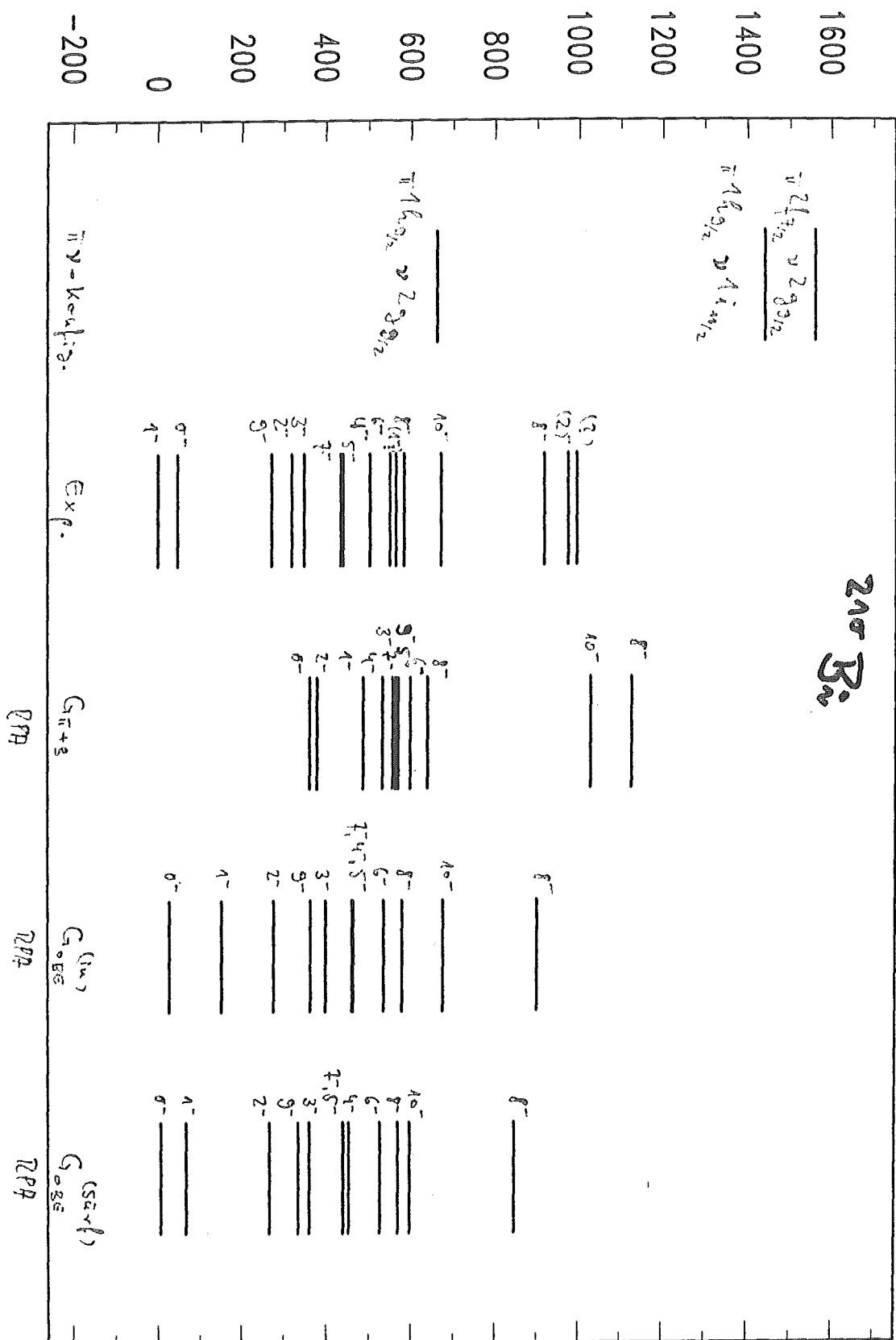


Fig. 11



[keV]

Fig. 12



[keV]

Fig. 13

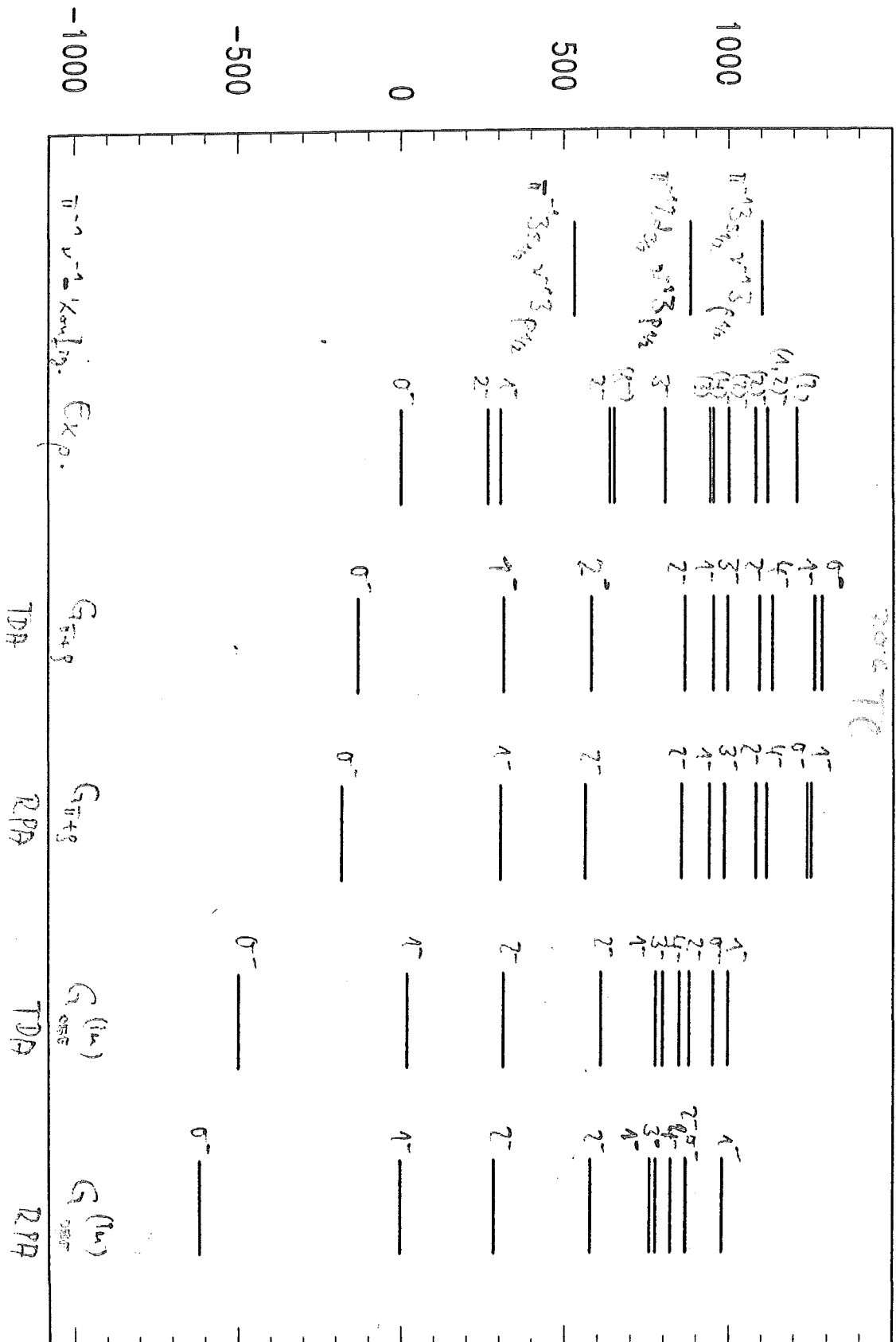
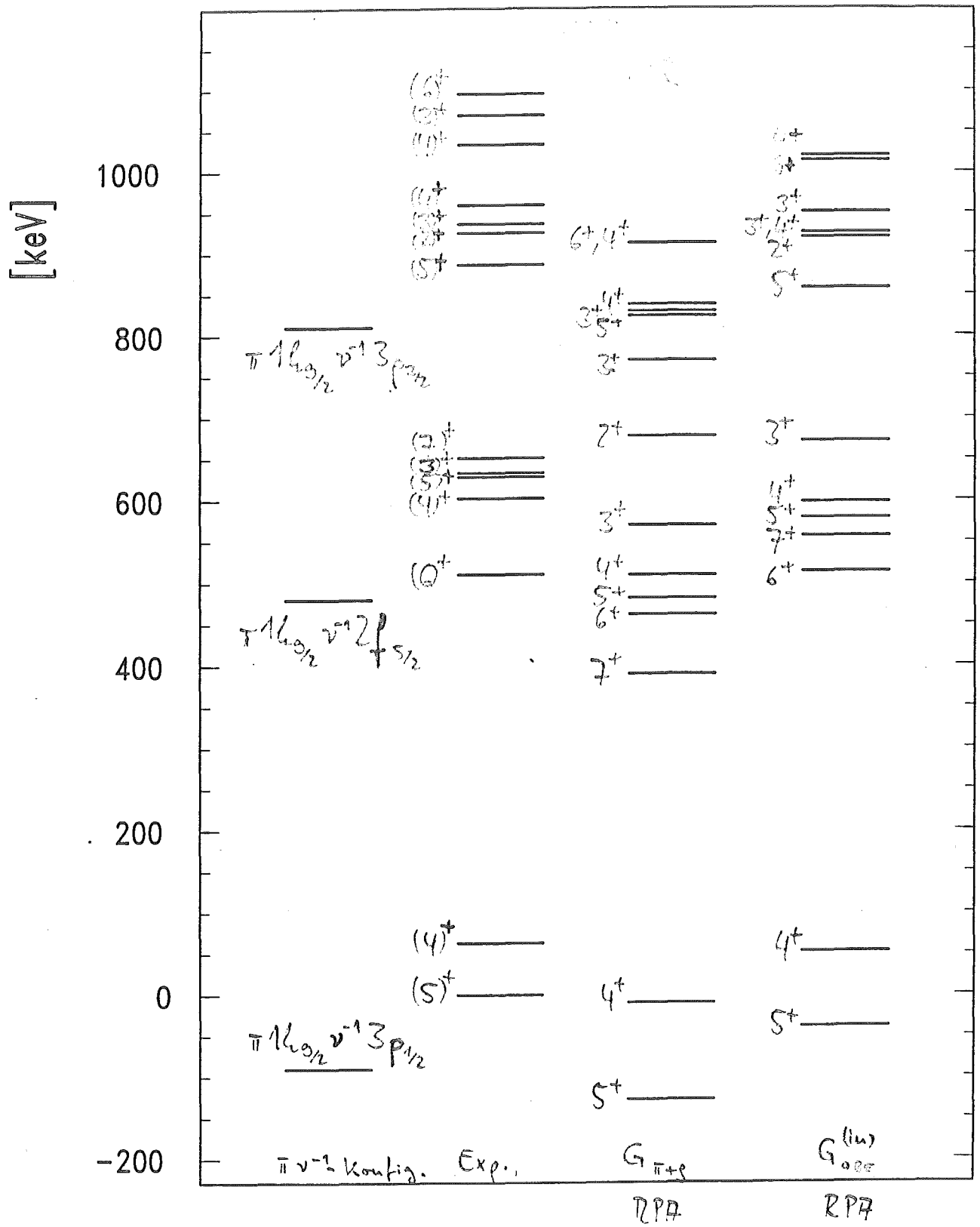
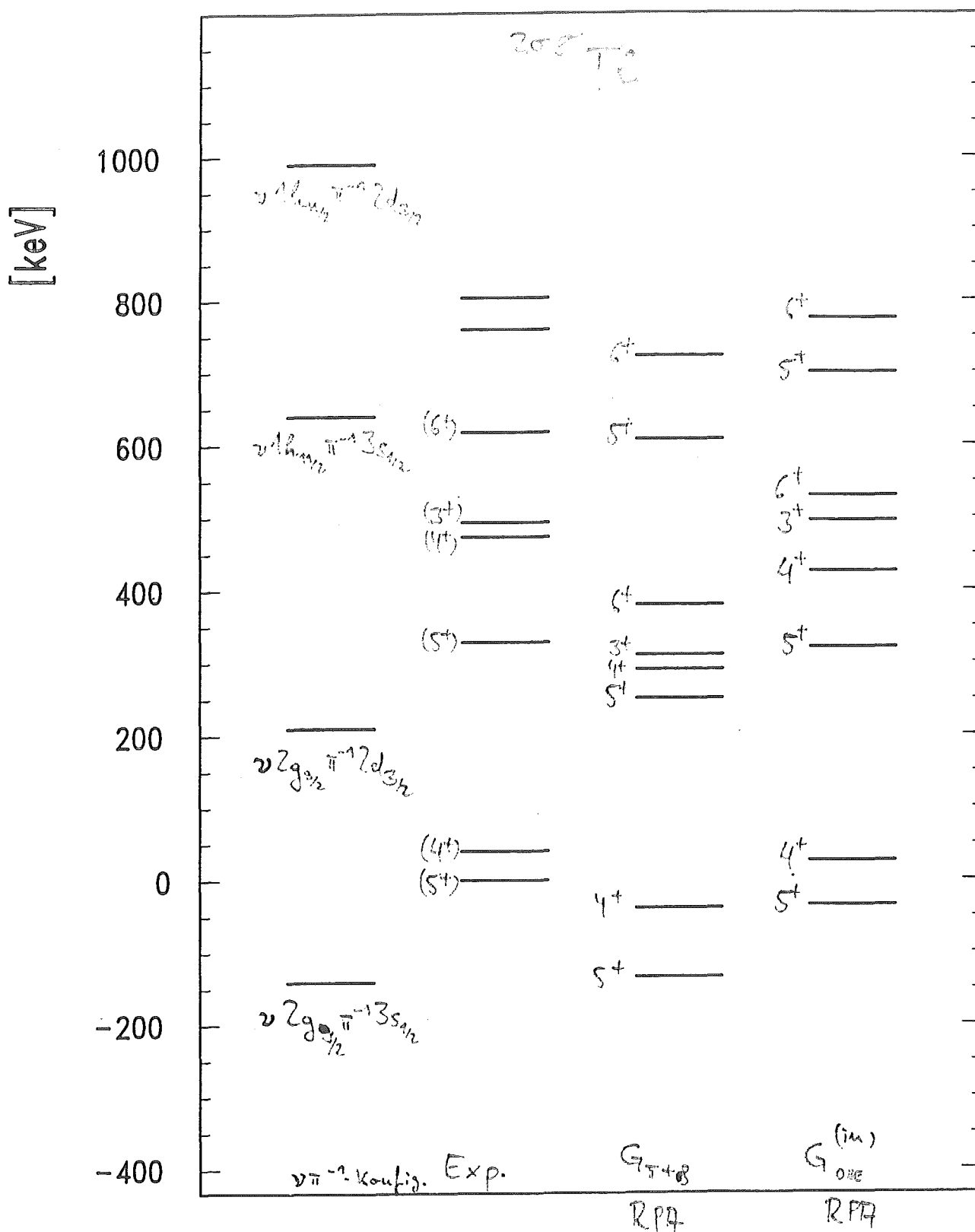


Fig. 14





Literaturverzeichnis

- (AB77) M.R. Anastasio, G.E. Brown, Nucl. Phys. A285 (1977) 516
- (AIK82) S.A. Artamonov, V.I. Isakov, S.G. Kadenskii, I.A. Lomachenkov, V.I. Furman, Yad. Fiz. 36 (1982) 829; Sov. J. Nucl. Phys. 36 (1982) 486
- (AS72) M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York 1965 (9th printing 1972)
- (BBG67) B.L. Birbrair, G.M. Bukat, V.N. Guman, Yad. Fiz. 5 (1967) 274; Sov. J. Nucl. Phys. 5 (1967) 193
- (BCL82) J.A. Becker, J.B. Carlson, R.G. Lanier et al., Phys. Rev. C26 (1982) 914
- (BD66) J.D. Björken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, BI Mannheim, 1966
- (BG77) P.J. Brussaard, P.W. Glaudemans, Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy, North-Holland, Amsterdam, 1977
- (BK73) B.R. Barrett, M.W. Kirson, Adv. Nucl. Phys. 6 (1973) 219
- (B²KS80) S.-O. Bäckman, G.E. Brown, V. Klemt, J. Speth, Nucl. Phys. A345 (1980) 202
- (BM79) A. Bohr, B.R. Mottelson, Struktur der Atomkerne, Band 1, Carl Hanser Verlag, München, 1979
- (B²OW77) G.E. Brown, S.-O. Bäckman, E. Oset, W. Weise, Nucl. Phys. A286 (1977) 191
- (Bra66) B.H. Brandow, Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi" Course XXXVI, ed. by C. Bloch, Acad. Press, NY and London, 1966, p. 486
- (Bri65) D.M. Brink, Nuclear Forces, Pergamon Press, Oxford, 1965
- (Bur79) W.E. Burcham, Elements of Nuclear Physics, Longman, London, 1979
- (BS80) I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 19. Auflage, Hrsg.: G. Grosche, V. Ziegler, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1979; Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun 1980
- (B-SBC80) N. Barash-Schmidt, C. Bricman, R.L. Crawford et al., Particle Properties Data Booklet April 1980, CERN, Genf, 1980 (aus Rev. Mod. Phys. 52 (1980))

- (BSW81) G.E. Brown, J. Speth, J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1057
- (BW60) J. Blomqvist, S. Wahlborn, Arkiv Fysik 16 (1960) 545
- (Con84) C. Conci, Application of the Quasiparticle-Random-Phase Approximation in the Region of the Semi-Magic Nucleus $^{146}_{64}\text{Gd}_{82}$, Dissertation, Universität Bonn, 1984
- (dSF74) A. deShalit, H. Feshbach, Theoretical Nuclear Physics, Vol. I, Nuclear Structure, J. Wiley, New York, 1974
- (dST63) A. deShalit, I. Talmi, Nuclear Shell Structure, Academic, New York, 1963
- (Dwi61) H.B. Dwight, Tables of Integrals and other Mathematical Data, Macmillan Publ. Co., 4th ed., New York, 1961
- (Ed66) G. Eder, Kernkräfte - Einführung in die theoretische Kernphysik, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1966
- (Ed74) A.R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, 3rd printing, 1974
- (Erk74) K. Erkelenz, Phys. Rep. C13 (1974) 191
- (ERW78) K. Ebert, P. Ring, W. Wild, V. Klemt, J. Speth, Nucl. Phys. A298 (1978) 285
- (HEA72) K. Holinde, K. Erkelenz, R. Alzetta, Nucl. Phys. A194 (1972) 161
- (Ho181) K. Holinde, Phys. Rep. 68 (1981) 121
- (HP75) G. Höhler, E. Pietarinen, Nucl. Phys. B95 (1975) 210
- (HS61) H. Horie, K. Sasaki, Prog. Theor. Phys. 25 (1961) 475
- (HSP66) T.A. Hughes, R. Snow, W.T. Pinkston, Nucl. Phys. 82 (1966) 129
- (IAS77) V.I. Isakov, S.A. Artamonov, L.A. Sliv, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Fiz. 41 (1977) 2041; Bull. Acad. Sci. USSR Phys. Ser. 41 (1977) 72
- (IAS82) V.I. Isakov, S.A. Artamonov, L.A. Sliv, Yad. Fiz. 35 (1982) 302, Sov. J. Nucl. Phys. 35 (1982) 173
- (Jac75) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd ed., J. Wiley, New York, 1975

- (KB66) T.²S. Kuo, G.E. Brown, Nucl. Phys. 85 (1966) 40
- (KH71) T.²S. Kuo, G.H. Herling, Naval Research Lab. memorandum report 2258, Washington D.C., 1971
- (KH72) T.²S. Kuo, G.H. Herling, Nucl. Phys. A181 (1972) 113
- (Kle70) V. Klemt, Anwendung der Quasiteilchenmethode auf einige Probleme von ug-Kernen in der Nachbarschaft von ²⁰⁸Pb, Dissertation, TH München, 1970
- (Kle82) V. Klemt, J. Phys. G: Nucl. Phys. 8 (1982) 1547
- (Kle82a,b) V. Klemt, private Mitteilungen
- (Kle83a,b) V. Klemt, private Mitteilungen
- (Kle84a,b) V. Klemt, private Mitteilungen
- (Kre84) S. Krewald, private Mitteilung
- (KS76) V. Klemt, J. Speth, Z. Physik A278 (1976) 59
- (LS78) C.M. Lederer, V.S. Shirley, Table of Isotopes, 7th edition, J. Wiley, New York, 1978
- (Me61) A. Messiah, Quantum Mechanics II, North-Holland, Amsterdam, 1961
- (Mig67) A.B. Migdal, Theory of finite Fermi systems and applications to atomic nuclei, J. Wiley, NY, 1967
- (Mig77) A.B. Migdal, Qualitative Methods in Quantum Theory, W.A. Benjamin, Reading (Mass.), 1977
- (MLE67) W.J. Mulhall, R.J. Liotta, J.A. Evans, R.P. Perazzo, Nucl. Phys. A93 (1967) 261
- (MT73) C.W. Ma, W.W. True, Phys. Rev. C8 (1973) 2313
- (Nak84) K. Nakayama, Dissertation, Univ. Bonn (in Vorbereitung)
- (NKS83) K. Nakayama, S. Krewald, J. Speth, W.G. Love, wird veröffentlicht
- (NKS84) K. Nakayama, S. Krewald, J. Speth, G.E. Brown, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 500
- (Ro68) D.J. Rowe, Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 153
- (Ro70) D.J. Rowe, Nuclear Collective Motion, Methuen, London, 1970
- (Rot59) M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis, J.K. Wooten, "The 3-j and 6-j symbols", The Technology Press (MIT), Cambridge, Mass., 1959

- (RP69) G. Ripka, R. Padjen, Nucl. Phys. A132 (1969) 489
- (RS80) P. Ring, P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer-Verlag, New York, 1980
- (SKW80) J. Speth, V. Klemt, J. Wambach, G.E. Brown, Nucl. Phys. A343 (1980) 382
- (Str74) A.H. Stroud, Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1974
- (SS66) A.H. Stroud, D. Secrest, Gaussian Quadrature Formulas, Prentice-Hall, 1966
- (SW83) B. Schwesinger, J. Wambach, wird veröffentlicht
- (SWW77) J. Speth, E. Werner, W. Wild, Phys. Rep. C33 (1977) 127
- (Th61) D.J. Thouless, Nucl. Phys. 22 (1961) 78
- (UR71) N. Ullah, D.J. Rowe, Nucl. Phys. A163 (1971) 257
- (VB72) D. Vautherin, D.A. Brink, Phys. Rev. C5 (1972) 626
- (VG71) J. Vary, J.N. Ginocchio, Nucl. Phys. A166 (1971) 479
- (WB77) A.H. Wapstra, K. Bos, Atom. Dat. and Nucl. Dat. Tabl. 19 (1977) 177
- (Wei77) W. Weise, Nucl. Phys. A278 (1977) 402

Danksagung

Prof. Speth danke ich für die entscheidende Ermunterung zu dem Wagnis einer "theoretischen" Diplomarbeit und für das lebhafteste Interesse an deren Resultaten.

Dr. V. Klemt verdanke ich eine Einführung in selbständiges Arbeiten auf unbekanntem Terrain (Kernstrukturphysik, Arbeiten mit großen Computerprogrammen) und hilfreiche Hinweise zu einigen kritischen Punkten (z.B. auch auf Rowe's Methode, die es mir erlaubte - das in Kap. 1.1 angeführte Zitat parodierend - "to admit the complexities of Greens functions but (at the same time) to bypass them by concentrating on the quantities of direct technical interest").

Dr.²C. Conci danke ich für zahllose nützliche Tips und ihre ständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft. K. Nakayama verdanke ich neben den OBE-G-Matrizen entscheidende Hilfestellung bei der Interpretation der Resultate. Die graphische Darstellung derselben in dieser Form wurde durch die Plotprogramme von Herrn E. Brökel und B. Hoffman ermöglicht. Frau M. Heese bewerkstelligte die Transformation der Arbeit von einem schwer lesbaren Manuskript in die vorliegende Form. (Für das Tippen der zahllosen Formeln mein besonderer Dank!)

Allen anderen Mitgliedern der Theoretikergruppe danke ich für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre sowie allfällige Ermutigung und Unterstützung.

